L
v.6
Physics



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

REMOTE STORAGE

ВЫП. 6

ИЗДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД 1940

Digitized by the Internet Archive
in 2016

https://archive.org/details/seriiafizicheski6194leni

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Вып. 6

Редактор Ф. Д. Клемент

ИЗДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД 1940

Издание Ленинградского государственного университета.

Отв. редактор *Ф. Д. Клемент.* Техн. редактор *А. Н. Коварская.* Корректор *В. И. Осипов.*

Сдано в набор 26/IV 1940 г. Подписано к печати 6/IX 1940 г. М 17602. Тираж 400 экз. + 25 отд. оттисков. Печ. л. $8^3/_8$ + 2 вклейки. Авт. л. 8,6. Уч.-авт. л. 10,1. Кол. печ. зн. в 1 печ. л. 48 800. Формат бумаги 62×92. Заказ № 278. Заказ ЛГУ № 121. Бумага ф-ки им. Володарского.

2-я типография ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига" „Печатный Двор" им. А. М. Горького. Ленинград. Гатчинская, 26.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*
59	1 снизу	1 200 000 V.	120 000 V.
74	1 снизу	$\log \frac{(E_2)\, d\,\Phi}{dE_2}$	$\log \frac{d\Phi\,(E_2)}{dE_2}$
86	23 снизу	$\Pi = \frac{\partial \Phi\,(E)}{\partial E}\, CV^n E^{\frac{3n}{2}-1}$	$\Pi = \frac{\partial \Phi\,(E)}{\partial E} = CV^n E^{\frac{3n}{2}-1}$
89	14 снизу	$S_p\,(A_1U) = a_1;$ $S_p\,(A_2U) = a_2\ \ldots,$	$Sp\,(A_1U) = a_1;$ $Sp\,(A_2U) = a_2\ \ldots,$
98	13 снизу	e^n	e^u
105	5 сверху	изображают макросостояние	изображают микросостояния

Ученые записки № 57—278.

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА НЕЙТРОНОВ, ИСПУСКАЕМЫХ ИСТОЧНИКОМ Rn + Be

Ю. А. Немилов

Распределение по энергиям нейтронов, испускаемых при расщеплении бериллия α-частицами согласно реакции

$$Be_4^9 + He_2^4 \rightarrow C_6^{12} + n^1,$$

исследовалось в ряде работ: Чадвиком [1], Кюри и Жолио [2], Фезером [3], Винандом [4], Даннингом [5] и Бернардини и Бочерелли [6]. Однако наличие некоторых групп нейтронов было обнаружено не во всех упомянутых выше работах и нуждается в дальнейшей проверке. Кроме того, все исследователи, за исключением Даннинга, пользовались для расщепления бериллия α-частицами полония, обладающими меньшей энергией, чем α-частицы, получающиеся в результате распада радона и последующих радиоактивных продуктов. В данной работе энергия нейтронов определялась путем измерения ионизации, производимой атомами отдачи в кислороде. Такой способ дает возможность получить большую статистическую надежность результатов, так как атомов отдачи сравнительно много, а источник нейтронов в этих опытах может быть помещен около самой камеры. Импульсы, получающиеся вследствие ионизации газа атомами отдачи, усиливались пропорциональным усилителем и регистрировались механическим нумератором. Источником нейтронов служила ампула с порошкообразным бериллием и радоном. Для уменьшения фона, создаваемого γ-лучами источника нейтронов, была сокращена полоса частот, пропускаемых усилителем. В обычных усилителях Вин-Вильямса нижний предел пропускаемых частот — около 10^{-3}. В усилителе, используемом в данной работе, он равнялся приблизительно $5 \cdot 10^{-3}$ пер/сек. Верхний предел пропускаемых частот был тоже ограничен и находился около 10^{-4} пер/сек. Это давало возможность работать с источником эманации радия в 500 милликюри, отделенным от камеры слоем свинца толщиной всего 2,5 см. При такой настройке усилителя пришлось соответственно уменьшать и время собирания ионов на электроды. Для этого была построена специальная ионизационная камера, состоящая из семи параллельно расположенных пластинок, между которыми был зазор 5 мм. На камеру подавалась разность потенциалов 1500 V. Плоские электроды были сделаны из сеток с отвер-

*

стиями в 2 кв. см, благодаря чему почти все треки атомов отдачи кончались в газе. Площадь каждого электрода была около 30 см^2, а общий полезный объем камеры — примерно 100 см^3. Камера наполнялась кислородом, так как, во-первых, он очень редко расщепляется нейтронами, а, во-вторых, атомы отдачи в нем даже при ударе сравнительно быстрых нейтронов, обладающих энергией 8·0 MeV, имеют пробег всего около 4 мм, вследствие чего искажения, вносимые электродами в распределение частиц, были незначительны.

При регулировке установки особое внимание было уделено тому, чтобы импульс, создаваемый ионами атомов отдачи, появившихся в различных частях камеры и в различных направлениях, и имеющий поэтому различную длительность, усиливался одинаково. Атомы отдачи, возникающие посредине между электродами (и параллельно им), создают импульс на камере приблизительно вдвое короче, чем атомы отдачи, появившиеся вблизи какого-нибудь электрода. Выравнивание усиления импульсов обоего типа достигалось включением параллельно сетке одной из ламп конденсатора, который уменьшал усиление более высоких частот. Емкость его подбиралась экспериментально.

Для получения распределения атомов отдачи по энергиям снималась кривая зависимости числа отбросов от запирающего потенциала на сетке одной из последних ламп усилителя. Градуировка производилась при помощи α-частиц определенного пробега, причем предполагалось, что α-частица образует в газе столько же ионов, сколько и ядро кислорода, обладающее той же энергией. Кроме того, в этих опытах считалось, что неупругих столкновений нейтронов с ядром кислорода мало по сравнению с числом упругих столкновений. Для уменьшения возможных ошибок (вследствие изменения усиления распада эманации и уменьшения связанного с этим фона) все точки кривой снимались в течение приблизительно двух часов (каждая точка 5 мин.), а потом вся процедура повторялась снова.

Кривая, полученная таким образом, представлена на рис. 1, где по ординатам отложено число отбросов в минуту, а по горизонтальной оси — энергия атомов отдачи. На ней ясно обозначаются две группы атомов отдачи с максимальными энергиями 0,9 и 1,8 MeV, соответствующие энергиям нейтронов 4,1 и 8,1 MeV. Кроме этих двух групп, существуют еще нейтроны с большой энергией, простирающейся, примерно, до 12·10^6 MeV; однако их существование на основании этих опытов не может считаться достоверным, так как в столь незначительных количествах появляются расщепления кислорода, а также могли повлиять и примеси других легче расщепляемых газов.

Если считать, что нейтроны рассеиваются ядром кислорода изотропно во всех направлениях без потери энергии, то теоретическая кривая зависимости числа атомов отдачи от их энергии будет близка к наклонной прямой, пересекающей ось абсцисс в точке, соответствующей максимальной энергии ядра отдачи, получаемой в том случае, когда нейтрон рассеивается назад

(точно на 180°). Экспериментальная кривая (рис. 1) имеет почти прямолинейный участок и поэтому скорее соответствует моно-

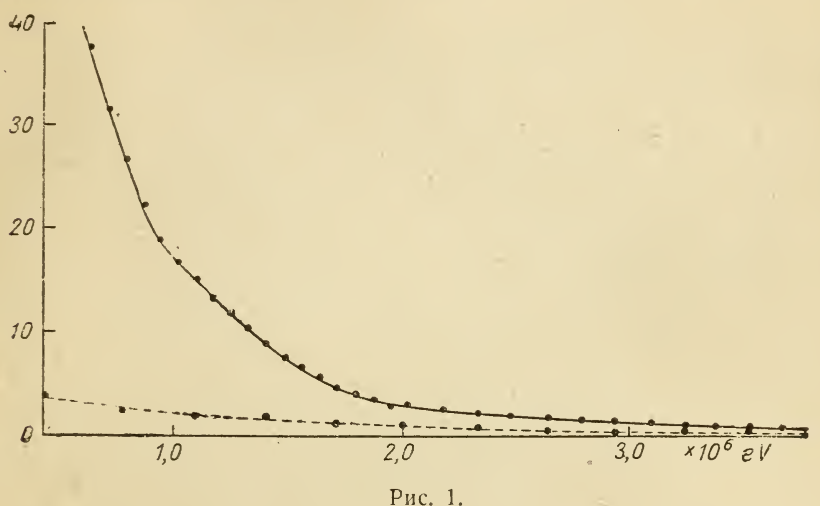


Рис. 1.

хроматической группе, чем какому-либо более широкому распределению скоростей нейтронов. Наличие двух групп нейтронов с энергиями около 4 и 8 MeV хорошо согласуется с данными почти всех авторов, занимавшихся этим вопросом. Однако, согласно измерениям Даннинга [5] и последним наиболее тщательным работам Бернардини и Бочерелли [6], кроме этих двух групп существует еще одна с энергией 6,3—6,5 MeV. Наличие этой третьей промежуточной группы нейтронов в данных опытах не подтверждается; во всяком случае, если она и существует, то интенсивность ее должна быть раз в пять меньше, чем группы с энергией около 8 MeV.

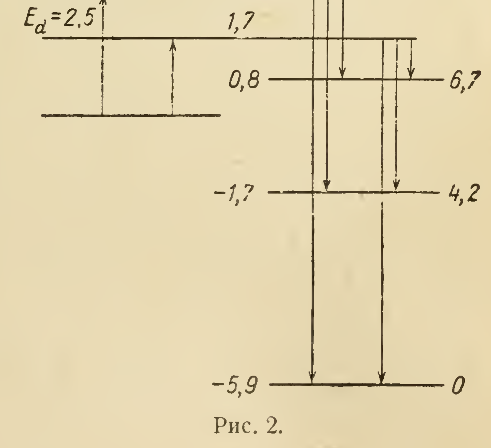


Рис. 2.

Имеется много экспериментальных работ, посвященных изучению зависимости выхода нейтронов от энергии бомбардирующих бериллий α-частиц; все авторы находят максимум выхода нейтронов при энергии α-частиц около 2,5 MeV. Кроме того, Бернардини [7], Бьерже [8] и Гуревич и Рик [9] находят второй максимум выхода нейтронов при энергии α-частиц около четырех миллионов вольт, причем абсолютный выход нейтронов

при этой энергии больше чем при 2,5·1 MeV в несколько раз. С другой стороны, исследования γ-лучей, появляющихся при бомбардировке бериллия α-частицами, произведенные впервые Боте [10], обнаружили три группы, обладающие энергиями 2,7; 4,2 и 6,7 MeV. Дальнейшие исследования в этом направлении, произведенные Оккеалини [11] и Джелеповым [12], в пределах возможных ошибок подтвердили эти результаты.

Исходя из современного представления о строении атомного ядра, естественно предположить следующую схему превращения ядра бериллия (рис. 2): α-частица захватывается, образуя промежуточное ядро, когда ее энергия равна 2,5 или 4,0 MeV; при этом часть энергии, могущая перейти во внутреннюю энергию образовавшегося ядра (учитывая его отдачу), равна соответственно 1,7 и 2,7 MeV. При распаде промежуточного ядра будет высвобождаться энергия в первом случае 7,5 MeV, во втором случае 8,5 MeV. Если, согласно данным Боте, предположить, что у ядра углерода C^{12} имеются возбужденные уровни при $4{,}2 \cdot 10^6$ и $6{,}7 \cdot 10^6$ MeV, то при переходе ядра на основной или один из возбужденных уровней первая группа α-частиц должна вызвать появление нейтронов с энергиями 0,8; 3,15 и 7,0 MeV, а вторая группа α-частиц будет связана с нейтронами 1,75; 4,05 и 7,95 MeV. Так как количество нейтронов, получаемых при захвате частиц с энергией 4,1 MeV, в несколько раз больше, чем при захвате более медленных α-частиц, то весьма вероятно, что на опыте мы наблюдаем только наиболее интенсивные группы, образуемые быстрыми α-частицами. Кроме того, близкие группы нейтронов, обладающие энергиями 7,0 и 7,95; 3,15 и 4,05 MeV, при использовании обычного источника нейтронов, представляющего из себя ампулку с эманацией и порошкообразным бериллием, разрешены быть не могут, так как скорость отдачи промежуточного ядра, имеющая различные направления в зависимости от направления движения налетающей α-частицы, накладывается на распределение нейтронов, вызывая его размытие. Две ясно различимые на кривой группы нейтронов с энергиями в 4,1 и 8,1 MeV, повидимому, образуется тогда, когда ядро C^{12} остается на основном или первом возбужденном уровне. В том случае, когда ядро C^{12} остается на возбужденном уровне 6,7 MeV, энергия нейтронов должна быть 1,6 MeV; такая группа действительно была обнаружена Даннингом.

В пользу такого строения возбужденных уровней ядра C_6^{12} говорят также результаты расщепления ядра бора дейтонами, полученные Боннером и Брюбакером [13]. Энергии групп нейтронов, образуемых в реакции

$$B_5^{11} + H_1^2 \rightarrow C_6^{12} + n^1,$$

оказались равными 13,2; 9,1; 65,1 и 4,55 MeV. Если первые три группы приписать расщеплению изотопа бора с массой 11, то разности между энергиями 1—2-й и 1—3-й групп, дающие энергии возбуждения ядра C_6^{12}, получаются равными 6,85 и 4,1 MeV.

То же ядро C_6^{12} получается в результате расщепления азота дейтонами

$$N_7^{14} + H_1^2 \rightarrow C_6^{12} + H_2^4.$$

Кокрофт и Левис [14], исследовавшие эту реакцию, нашли две группы α-частиц, энергии которых отличались на 4,3 MeV, что тоже хорошо согласуется с положением первого возбужденного уровня ядра углерода.

Таким образом, полученное экспериментально распределение по энергиям нейтронов, испускаемых при бомбардировке бериллия α-частицами, хорошо укладывается в рамки описанной выше схемы уровней возбужденного ядра C_6^{12}, правильность которой, в свою очередь, подтверждается результатами исследований ряда других ядерных реакций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chadwick, Proc. Roy. Soc., 142, 1, 1932.
2. Curie et Jaliot, Journ. d. Phys., 4, 21, 1932.
3. Feather, Proc. Roy. Soc., 136, 709, 1932.
4. Winand, Journ. d. Phys., 5, 597, 1934.
5. Dunning, Phys. Rev., 45, 586, 1934.
6. Bernardini, Bocciarelli, Acad. Lincei. Atti, 24, 59 и 132, 1936. Ricerca Scient., 8, 33, 1937.
7. Bernardini, Zeits. f. Phys., 85, 555, 1933.
8. Bjerge, Proc. Roy. Soc., 164, 243, 1938.
9. Гуревич и Рик, Частное сообщение.
10. Bothe, Zeits. f. Phys., 100, 273, 1936.
11. Occhialini, Acad. Lincei. Atti, 25, 188, 1937.
12. Джелепов, Частное сообщение.
13. Bonner and Brubaker, Phys. Rev., 50, 308, 1936.
14. Cockeroft and Lewis, Proc. Roy. Soc., 154, 261, 1936.

РАЗРАБОТКА НОВОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЧКА ФАЗЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА ОТ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА

А. В. Луизов

На рис. 1 изображена упрощенная схема измерения длины концевой меры при помощи интерференционного компаратора Kösters'a. При отражении света от среды оптически более плотной происходит скачок фазы. Можно считать поэтому, что свет отражается не от поверхности тела, а от какой-то другой, не со-

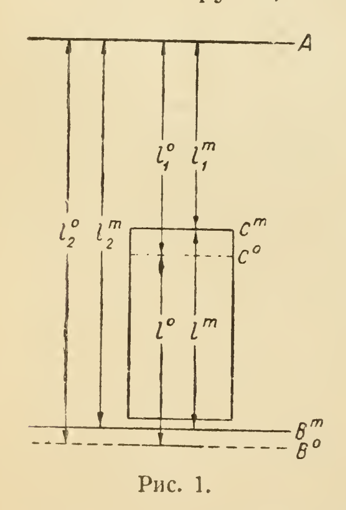


Рис. 1.

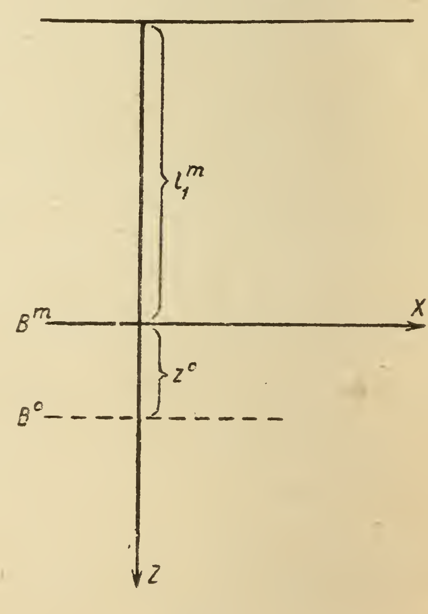


Рис. 2.

впадающей с поверхностью тела, плоскости, которую мы будем называть оптической плоскостью. Это заставляет нас различать оптические и механические длины (или расстояния). Оптическая длина меры l^0 определяется как разность двух оптических длин

$$l^0 = l_2^0 - l_1^0,$$

где l_2^0 — оптическое расстояние от зеркала A до поверхности, к которой мера притерта, l_1^0 — оптическое расстояние от того же зеркала до поверхности меры C^0. (В обоих случаях это расстояние

не до механических поверхностей C^m и B^m, а до оптических C^0 и B^0. Конечно, и для зеркала оптическая и механическая поверхности не совпадают, но расстояние между ними исключается при вычитании оптических длин, и поэтому мы сочли возможным не усложнять рассуждений учетом скачка фазы на зеркале).

Чтобы от оптической длины l^0 перейти к механической длине меры l^m, рассмотрим, чем отличаются механическое и оптическое расстояния от зеркала до поверхности меры.

Пусть направление света, падающего на меру, совпадает с осью Z (см. рис. 2), а поверхность меры лежит в плоскости XOY, т. е. уравнение механической поверхности меры

$$z = 0.$$

Уравнение оптической плоскости

$$z = z_0$$

и, следовательно,

$$l_1^0 = l_1^m + z_0.$$

Свет, падающий на поверхность меры, изобразим уравнением

$$X = Ae^{i\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{z}{\lambda}\right)},$$

где X — напряженность электрического поля.[1]

Свет отраженный[2]

$$X = Ae^{i\left(2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{z}{\lambda} + \delta\right)},$$

где δ — скачок фазы при отражении от поверхности меры, выраженный в радианах.

Интерференция падающего и отраженного света дает стоячие волны, узлы которых будут там, где соблюдается равенство:

$$Ae^{i\left(2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{z}{\lambda} + \delta\right)} + Ae^{i\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{z}{\lambda}\right)} = 0.$$

Отсюда:

$$e^{i\left(4\pi\frac{z}{\lambda} + \delta\right)} = -1,$$

т. е.

$$4\pi\frac{z}{\lambda} + \delta = (2n + 1)\pi,$$

где n — целое число.

Первый узел будет при $n = 0$

$$4\pi\frac{z}{\lambda} + \delta = \pi,$$

[1] Винер (Wiener) своими опытами над стоячими волнами показал, что на фотографическую пластинку действуют колебания электрического, а не магнитного вектора. Это побуждает нас всюду за световой вектор принимать напряженность электрического поля.

[2] Для упрощения мы положили, что отражается вся энергия света, упавшего на поверхность меры.

или

$$z = \frac{\pi - \delta}{4\pi} \lambda. \qquad (1)$$

Вводя понятие оптической плоскости, мы должны считать, что от нее свет отражается уже без потери фазы, а это значит, что на ней должна находиться пучность. Пучности лежат на расстоянии $\frac{\lambda}{4}$ от узлов.

Значит:

$$z_0 = \frac{\pi - \delta}{4\pi} - \frac{\lambda}{4} = -\frac{\delta}{4\pi} \lambda$$

и, следовательно,

$$l_1^0 = l_1^m - \frac{\delta}{4\pi} \lambda$$

или

$$l_1^m = l_1^0 + \frac{\delta}{4\pi} \lambda.$$

Повторяя те же рассуждения для поверхности, к которой мера притерта, получим

$$l_2^m = l_2^0 + \frac{\delta_2}{4\pi} \lambda,$$

где δ_2 скачок фазы на поверхности, к которой мера притерта.

Теперь, чтобы получить механическую длину меры l^m, вычтем l_1^m из l_2^m

$$l^m = l_2^m - l_1^m = l_2^0 - \frac{\delta_2 \lambda}{4\pi} - \left(l_1^0 + \frac{\delta \lambda}{4\pi} \right) = l^0 + \frac{\delta_2 - \delta}{4\pi} \lambda. \qquad (2)$$

Меру притирают обычно к кварцу, на котором скачок фазы равен $-\pi$, т. е.

$$\delta_2 = -\pi.$$

Вопреки обычаю, мы ставим перед π знак минус. Дело в том, что для согласования математического выражения напряженности электрического поля с данными эксперимента мы можем взять любой знак: (+) или (—). Но если вводить понятие оптической плоскости, ее положение будет зависеть от выбора знака при π: в случае плюса оптическая плоскость будет лежать над механической плоскостью, в случае минуса — под ней. По существу и это безразлично, так как оптическая плоскость — понятие чисто геометрическое. Однако экспериментаторы привыкли представлять себе, что оптическая плоскость лежит глубже механической, в толще вещества, отражающего свет. Мы не хотели нарушать это традиционное представление. Зато нам пришлось нарушать другой обычай и ввести знак минус перед π. Соблюдение обеих традиций приводит к противоречию, на которое до сих пор както не обращали внимания.

Обозначим

$$\Delta = \delta_2 - \delta = -\pi - \delta;$$

$$p = \frac{-\pi - \delta}{4\pi} \lambda = \frac{\Delta}{4\pi} \lambda. \qquad (3)$$

Величина p представляет собой поправку, которую нужно прибавить к оптической длине меры, чтобы получить ее механическую длину. Естественно поэтому, что метод определения этой величины представляет большой практический интерес. Из приведенных формул видно, что задачи определения поправки p или δ эквивалентны, так что, найдя одну из этих величин, мы сразу можем получить и другую.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ СКАЧКА ФАЗЫ

Электромагнитная теория света позволяет вычислить ожидаемое значение скачка фазы по оптическим константам металла. Возьмем формулу коэффициента отражения для амплитуды при нормальном падении.

$$r = -\frac{n' - n}{n' + n}.$$

Здесь свет переходит из среды с показателем преломления n в среду с показателем преломления n'.

Считая, что $n = 1$, получим

$$r = -\frac{n' - 1}{n' + 1}.$$

Так как для поглощающей среды показатель преломления есть величина комплексная, напишем

$$n' = n - i\varkappa.$$

Здесь $\varkappa$ — показатель поглощения, причем теория связывает n к $\varkappa$ соотношением

$$\varkappa = \frac{2\pi\sigma}{n\omega},$$

где ω — частота падающего света,

σ — электропроводность среды.

Подставим в формулу, определяющую r, комплексный показатель преломления

$$r = \frac{1 - (n - i\varkappa)}{1 + (n - i\varkappa)} = \rho e^{i\delta}.$$

Здесь ρ — отношение отраженной амплитуды к падающей, а δ — изменение фазы при отражении. Избавляясь от комплексности в знаменателе, получим

$$r = \frac{n^2 - x^2 - 1 - 2i\varkappa}{(n + 1)^2 + \varkappa} = \rho e^{\delta},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{2\varkappa}{n^2 + \varkappa^2 - 1}. \tag{4}$$

Значение n и $\varkappa$ можно найти для данного металла, наблюдая характер эллиптической поляризации света при отражении от поверхности этого металла.

δ зависит, конечно, от длины волны, но так, что для стали

величина p, равная $\frac{-\pi-\delta}{4\pi}\lambda$, мало меняется при изменении длины волны.

Ниже мы приводим таблицу[1] вычисленных различными авторами значений скачка фазы при отражении от стали для разных длин волн. Данные пересчитаны уже в линейные единицы, т. е. вместо δ или Δ даны сразу значения $2p$ в микронах

λ	n	$\varkappa$	Авторы	$2p$
0,400	1,68	2,73	Minor	0,034
0,431	1,70	2,43	Quincke	0,038
0,450	1,89	2,93	Minor	0,035
0,486	1,88	3,05	Jamin	0,037
0,486	1,78	2,75	Quincke	0,040
0,500	2,09	3,15	Minor	0,035
0,527	2,06	3,16	Jamin	0,037
0,527	1,96	2,89	Quincke	0,040
0,550	2,31	3,30	Minor	0,036
0,589	2,41	3,40	Drude	0,037
0,589	2,49	3,43	Minor	0,036
0,589	2,27	3,37	Jamin	0,039
0,589	2,13	3,01	Quincke	0,042
0,630	2,62	3,46	Drude	0,037
0,630	2,65	3,54	Minor	0,037
0,656	2,33	3,20	Quincke	0,043

Округляя для поправки на скачок фазы, получим величину

$$p=0{,}02\,\mu.$$

Сравним теперь эту теоретически найденную величину с данными опыта.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЧКА ФАЗЫ

Перар и Моде [2] определяли значение скачка фазы на поверхности стальной концевой меры, пользуясь кольцами Ньютона. Плоско-выпуклая чечевица накладывалась выпуклой поверхностью на меру и освещалась монохроматическим светом, падающим на меру нормально. Интерференционная картина отвечает формуле

$$\rho_k=2R\left(k\frac{\lambda}{2}-r\right), \qquad (5)$$

где ρ_k — радиус k-го кольца; R — радиус кривизны линзы; r — расстояние от точки касания линзы до оптической плоскости B^0 поверхности, уменьшенное на $\frac{\lambda}{4}$ (см. рис. 3).

Если бы касание, как изображено на рис. 3, происходило действительно в одной точке, лежащей на механической поверхности меры, мы имели бы $r=p$. На самом деле мера и линза

[1] Таблица взята нами из статьи Т. Н. Крыловой [1].

деформируются, так что $r < p$. Обозначим углубление стекла в поверхности меры через α (точнее α равна расстоянию от поверхности линзы, если считать, что радиус кривизны линзы не изменился (см. рис. 4), получим

$$p = r + \alpha.$$

Измерив радиусы двух колец, по формуле (5) легко найти R и r. Величину α Перар и Моде вычисляли теоретически по формулам Герца.

Чтобы проконтролировать эти расчеты, Перар и Моде накладывали чечевицу на стекло и повторяли измерения и расчеты. Величина α для стекла оказывалась столь близкой к нулю, что применимость формул Герца можно было считать вполне подтвержденной.

Рис. 3.

Результат измерений по этому методу таков:

$$p = (0{,}0717 \pm 0{,}0013)\,\mu.$$

Другим методом Перар и Моде определяли разность между механической и оптической длиной меры при измерении интерферометром типа Фабри и Перо.

Длина концевой меры определяется как длина перпендикуляра, опущенного из середины верхней поверхности меры на поверхность, к которой мера притерта. В виду того, что в интерферометре Фабри и Перо меру ни к чему не притирают, для получения ее механической длины к расстоянию между ее механическими поверхностями нужно прибавить еще толщину притирочного слоя.

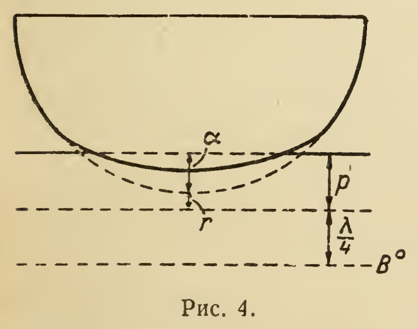


Рис. 4.

Пусть мера E помещена между двумя стеклянными пластинками интерферометра G_1 и G_2 (см. рис. 5). Очевидно, что ее оптическая длина

$$l^0 = L^0 - l^0{}_1 - l^0{}_2,$$

а механическая длина

$$l = L^0 - l^0{}_1 - l^0{}_2 + 2p + t = l^0 + (2p + t),$$

где t — толщина притирочного слоя.

Поправку $(2p + t)$ находим, промеряя сначала n мер порознь, а затем — блок, составленный из этих мер. Отдельные измерения дают:

$$l^0{}_1 = l_1 - (2p + t)$$
$$l^0{}_2 = l_2 - (2p + t)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$l^0_n = l_n - (2p + t)$$

$$\sum_{k=1}^{n} l^0_k = \sum_{k=1}^{n} l_k - n(2p + t). \qquad (6)$$

Измерение блока дает

$$l^0 = l - (2p + t). \qquad (7)$$

Так как $\sum_{k=1}^{n} l_k = l$, решая (6) и (7) относительно $(2p + t)$, получим

$$(2p + t) = \frac{l^0 - \sum_{k=1}^{n} l_k^0}{n - 1}. \qquad (8)$$

Перар и Моде получили

$$(2p + t) = 0{,}086\,\mu.$$

Сравнивая свои результаты, Перар и Моде нашли:

$$t = -0{,}06\,\mu.$$

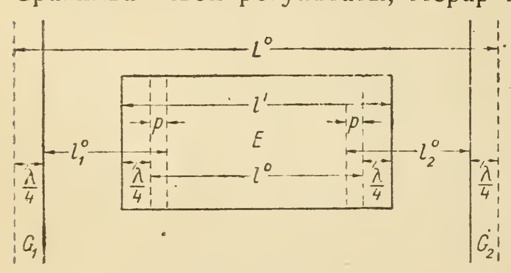


Рис. 5.

Kösters для отыскания поправки на скачок фазы дважды промерял одну и ту же меру в своем интерферометре, притирая ее сначала к стальной, а затем к кварцевой поверхностям. Разность полученных таким образом длин и будет p, причем это p относится собственно к стальной поверхности, к которой мера притиралась.

Kösters [3] находит, что скачок фазы варьируется в широких пределах в зависимости, главным образом, от качества полировки стали, причем хорошая полировка может довести p почти до нуля $(0{,}01 - 0{,}02\,\lambda)$.

СРАВНЕНИЕ ДАННЫХ ТЕОРИИ И ОПЫТА

Мы видим, таким образом, что данные опыта настолько расходятся с данными теории, что теоретическая формула для скачка фазы по существу практического значения не имеет. Расхождение данных теории и опыта можно объяснить наличием поверхностных пленок, которые образуются при полировке, а также в результате действия атмосферного кислорода и других воздействий на уже готовую меру. Следовательно, скачок фазы — величина изменчивая и неустойчивая. Поэтому, внося поправку на скачок фазы, необходимо иметь возможность измерить эту поправку именно для данной меры и в то же время, когда производится измерение этой меры.

СУЩНОСТЬ НОВОГО МЕТОДА

По мысли А. А. Лебедева, в его лаборатории под непосредственным руководством Г. В. Покровского был разработан новый метод определения поправки на скачок фазы. Изложим прежде всего основную идею этого метода.

Возьмем стеклянную пластинку, в плоской поверхности которой сделано посредине углубление в виде клина глубиной от 0 до 1—1,5 μ (см. рис. 6). На дне углубления параллельно ребру клина нанесена метка — царапина алмазом. Посадив пластинку с клином (будем в дальнейшем называть ее просто клином) на оптический контакт на другую пластинку, будем наблюдать интерференционную картину, получающуюся при нормальном падении на пластинку монохроматического света. Измерив расстояние от метки до двух ближайших минимумов, снимем клин со стекла и посадим на изучаемую меру. По смещению полос относительно метки можно теперь судить о скачке фазы на поверхности меры.

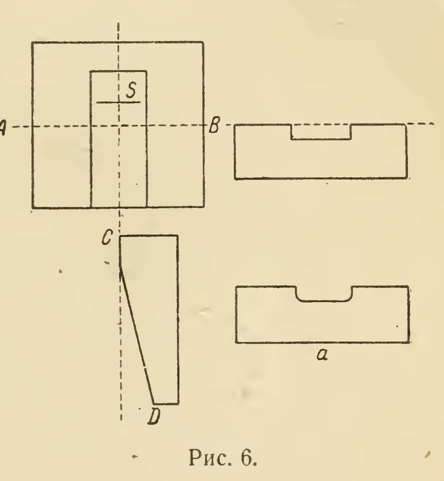


Рис. 6.

Выведем зависимость между поправкой на скачок фазы и этим смещением.

В первом случае (рис. 7) мы имеем воздушный клин между стеклянными поверхностями. Интерферируют лучи R_1 и R_2, из коих первый отразился от среды менее плотной (стекло — воздух) без скачка фазы, второй же отразился от более плотной среды (воздух — стекло) и для него скачок фазы $\delta = -\pi$. Это значит, что на нижнем стекле оптическая плоскость лежит на четверть волны ниже механической и, следовательно, разность хода для лучей R_1 и R_2 будет не $2l$ (где l расстояние между механическими плоскостями клина), а

$$2\left(l + \frac{\lambda}{4}\right).$$

Минимумы будут лежать там, где выполнено условие

$$2\left(l + \frac{\lambda}{4}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \tag{9}$$

где n целое число.

Так как ребро клина находится в точке

$$x = 0,$$

$$l = x_n \operatorname{tg} \alpha.$$

и поэтому (9) можно переписать в виде

$$2\left(x_n \operatorname{tg}\alpha + \frac{\lambda}{4}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right). \qquad (10)$$

Решая (10) для x_n, найдем положение минимумов

$$x_n = \frac{\lambda}{2\operatorname{tg}\alpha} n.$$

Расстояние между соседними минимумами α, очевидно, будет:

$$d = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2\operatorname{tg}\alpha}(n+1) - \frac{\lambda}{2\operatorname{tg}\alpha} n = \frac{\lambda}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

и, следовательно,

$$x_n = nd. \qquad (11)$$

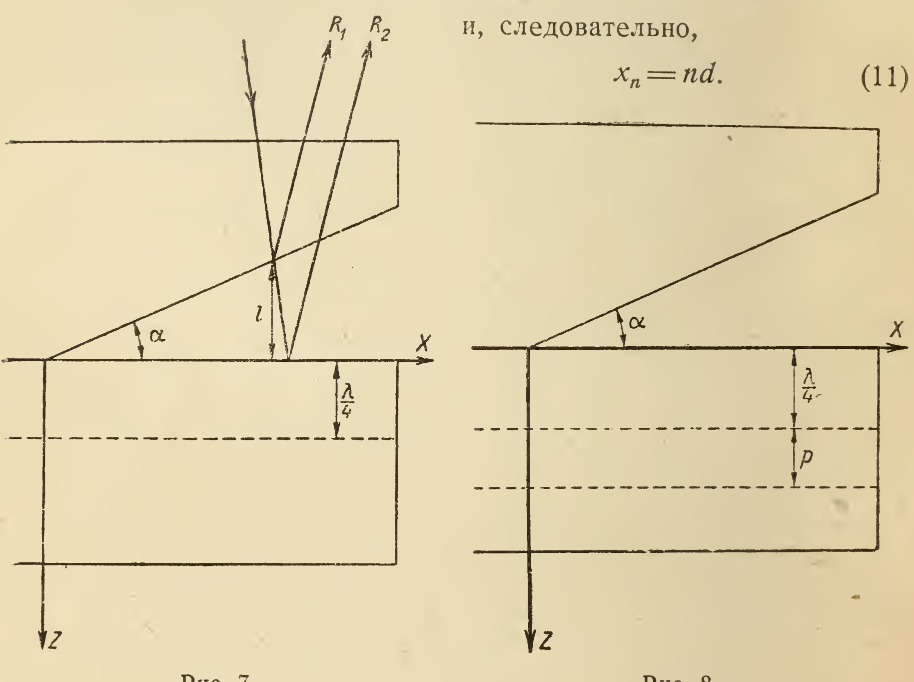


Рис. 7. Рис. 8.

В случае посадки этого же клина на металл оптическая плоскость окажется лежащей глубже, чем в стекле, на величину p, и для разности хода мы будем иметь новое выражение

$$2\left(l + \frac{\lambda}{4} + p\right)$$

или

$$2\left(x' \operatorname{tg}\alpha + \frac{\lambda}{4} + p\right).$$

Новое условие минимумов будет

$$2\left(x_n' \operatorname{tg}\alpha + \frac{\lambda}{4} + p\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Откуда

$$x_n' = \frac{\lambda}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,n - \frac{p}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Легко видеть, что расстояние между минимумами будет то же.

$$x'_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} = a.$$

И поэтому, так как

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2d}{\lambda},$$

$$x_n' = nd - \frac{2d}{\lambda}\,p. \qquad (12)$$

Теперь легко найти смещение полос при пересадке клина со стекла на сталь:

$$x_n - x_n' = nd - \left(nd - \frac{2d}{\lambda}\,p\right) = \frac{2d}{\lambda}\,p.$$

Откуда

$$p = \frac{x_n - x_n'}{d}\cdot\frac{\lambda}{2}. \qquad (13)$$

Если p положительно, т. е. если в стали оптическая плоскость лежит действительно глубже, чем в стекле (иначе говоря, $|\delta| > |-\pi|$), x_n' должен быть меньше x_n, т. е. при пересадке клина на сталь полосы должны смещаться к ребру клина. Именно такое смещение мы и наблюдали во всех наших опытах.

Фактически отсчеты производятся не от ребра клина, а от метки, что, однако, по существу дела не меняет, так как в формулу (13) входят не самые координаты, а только их разности.

Если метка нанесена между минимумами $n=1$ и $n=2$, мы, посадив пластинку на стекло, раз навсегда определяем

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_0}{d} \\ &\text{и} \\ r_2 &= \frac{x_0 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_0 - x_2}{d} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где x_0 — координата метки.

Затем, сажая клин на исследуемую меру, находим

$$\left.\begin{aligned} r_1' &= \frac{x_1' - x_0'}{x_2' - x_1'} = \frac{x_1' - x_0'}{d'} \\ r_2' &= \frac{x_0' - x_2'}{x_2' - x_1'} = \frac{x_0' - x_2'}{d'} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

и определяем p так:

$$\left.\begin{aligned} p &= (r_1 - r_1')\,\frac{\lambda}{2} \\ &\text{или} \\ p &= (r_2' - r_2)\,\frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Заметим, что d и d' вообще говоря неравны друг другу, так как при измерениях этих величин увеличения могут быть раз-

личными, но пропорционально d увеличивается и $x-x_0$, так что формула (16) остается верной.

Если вместо p нам нужно определить сам скачок фазы, мы можем воспользоваться формулой (3) в соответствующем видоизменении

$$\delta = -\frac{4\pi\left(p+\frac{1}{4}\lambda\right)}{\lambda} = -\left[2\pi\left(r_1-r_1'\right)+\pi\right] \qquad (17)$$

и, следовательно,

$$\Delta = -\pi - \delta = 2\pi\left(r_1-r_1'\right). \qquad (18)$$

Нужно заметить, что найденные таким образом p, δ и Δ неточны, так как разность хода интерферирующих лучей при пересадке клина со стекла на меру увеличивается не только за счет скачка фазы, но и за счет толщины притирочного слоя. Так что, собственно, мы определяем не p, а только близкую к нему величину, которую мы в дальнейшем будем обозначать p'.

$$p' = p + t, \qquad (19)$$

где t — толщина притирочного слоя.

О величине t и о возможности перейти от p' к p мы скажем несколько позже.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДРОБНОСТИ

При реальном осуществлении в принципе уже описанного метода наибольшее затруднение представляло получение клинообразного углубления на поверхности стеклянной пластинки. Эта задача была разрешена применением плавиковой кислоты. Исходная пластинка размером $22 \times 21 \times 4$ мм³ защищалась со всех сторон парафином. Незащищенной оставалась только полоса шириной в 8 мм посредине одной из плоскостей пластинки. Затем пластинка, подвешенная так, чтобы незащищенная полоса была расположена в вертикальном направлении, медленно и равномерно погружалась в ванну со слабым раствором плавиковой кислоты.

Скорость погружения была около 15 мм/час. После погружения на глубину примерно 15 мм пластинка вынималась, промывалась водой и освобождалась от парафина.

Для равномерного погружения пластинки был сконструирован механизм, действующий по принципу клепсидры (см. рис. 9). Скорость погружения можно было изменять, регулируя вытекающую из сосуда струю воды при помощи зажима.

Скорость травления сильно варьирует в зависимости от сорта стекла. Клин в 5—6 полос образовался на некоторых стеклах в течение часа, на некоторых же — в 15 минут.

Этим методом нам удавалось получать достаточно хорошие клинья. Идеальный клин должен быть таким, каким он изображен на рис. 6. Фактически сечение клина А — В никогда не получалось прямоугольным. Края были несколько закруглены, как

Рис. 9. Установка для получения клинообразной кановки.

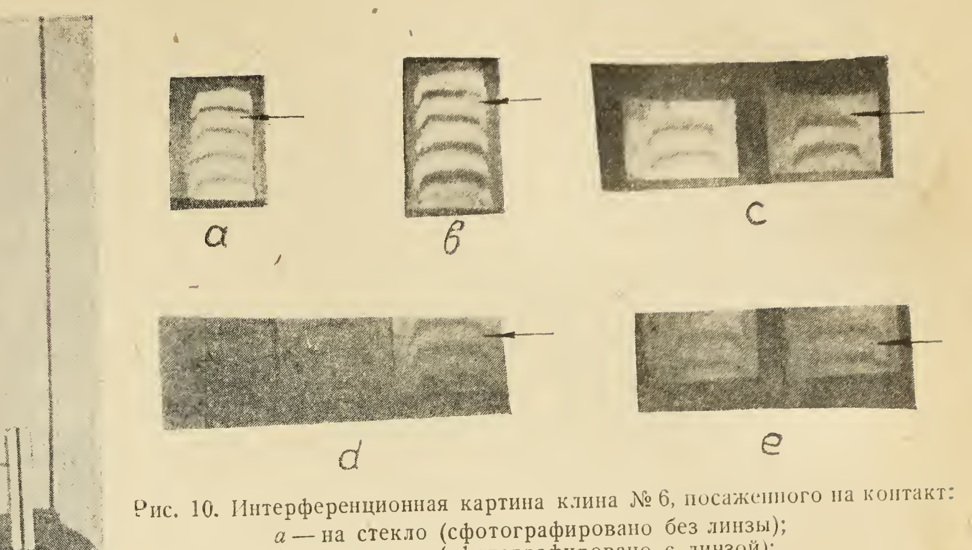


Рис. 10. Интерференционная картина клина № 6, посаженного на контакт:
a — на стекло (сфотографировано без линзы);
b — на стекло (сфотографировано с линзой);
c — на плитку Иогансона;
d — на плитку завода „Красный Инструментальщик“;
e — на плитку Вернера.
Стрелкой указано положение метки.

изображено на рис. 6, а поэтому и интерференционные полосы оказывались искривленными (рис. 10). Но это мало существенно. Важно, чтобы линия, проведенная посредине вдоль клина по его дну, как можно более приближалась к прямой. Чем меньше отклонения этой линии от прямой, тем выше качество клина. О способе исследования качества клина мы скажем несколько ниже.

Для того чтобы на фотографии метка выходила отчетливо, ее нужно нанести так, чтобы она не приходилась на минимум.

Фотографирование интерференционной картины мы производили, расположив приборы по схеме, изображенной на рис. 11. Свет от ртутной дуги A проходит через широкую диафрагму D и фильтр F и, отражаясь от полупрозрачного зеркала G, падает на пластинку с клином P, посаженную на контакт на меру. Изображение интерференционной картины при помощи линзы L получается на фотопластинке K.

Снимки мы получали при экспозиции от 20 секунд до 3 минут для пластинок ортохром чувствительностью 300 по H a·D. Кассеты, линза, зеркало и пластинка с клином, сидящая на мере, — все это помещалось в закрытом устойчивом ящике.

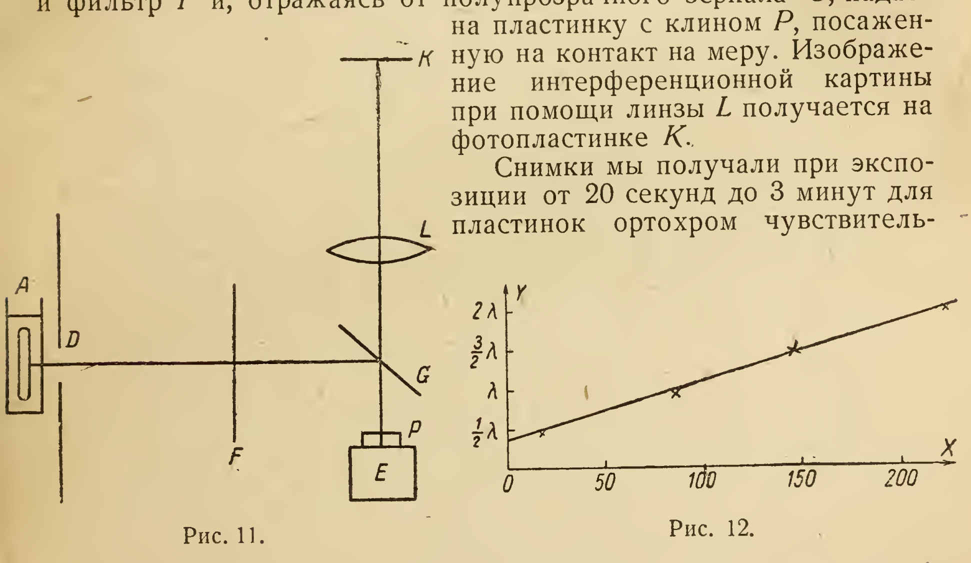


Рис. 11.

Рис. 12.

Промер клина. Промер клина имеет двойную цель:

1) исследовать качество клина;

2) определить положение ближайших минимумов относительно метки.

В виду несовершенства нашей оптической системы (простая линза, дающая сильную дисторсию) при исследовании качества клина мы убирали линзу L и пользовались просто теневой проекцией. Чтобы при этих условиях получить достаточно резкую картину, расстояние между клином и кассетой сильно уменьшалось, расстояние от зеркала G до источника света увеличивалось, а диафрагма D суживалась. Уменьшение освещенности компенсировалось увеличением экспозиции.

Приведем данные исследования качества клина № 6, при помощи которого мы провели всю нашу дальнейшую работу.

*

Клин № 6 на стекле. Сфотографировано без линзы.

Глубина клина в длинах волн y	Положение минимумов						Расст. между минимумами $x_n - x_{n-1}$	Средняя ошибка наблюдения Δx
	Результаты каждого измерения					Среднее		
$\frac{1}{2}\lambda$	0,92	0,83	0,94	0,88	0,82	0,88		0,04
							3,33	
λ	4,31	4,17	4,18	4,18	4,20	4,20		0,04
							3,33	
$\frac{3}{4}\lambda$	7,58	7,56	7,53	7,50	7,51	7,54		0,03
							3,56	
2λ	11,07	11,07	11,12	11,11	11,14	11,10		0,03

Найденные четыре точки клина откладываем на графике в масштабе (см. рис. 12): для y λ в 40 мм, для x 1 мм в 20 мм.

x	y
17,60	20
84,00	40
150,80	60
222,00	80

Найдем прямую

$$y = ax + b,$$

подобрав коэффициенты a и b так, чтобы среднее квадратичное отклонение экспериментально найденных точек от ординат этой прямой было наименьшим, т. е. найдем минимум величины

$$\overline{(\Delta y)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}(ax_k + b - y_k)^2,$$

где x_k и y_k — координаты экспериментально найденных точек.

Чтобы найти минимум, дифференцируем сумму по a и по b и обе частные производные приравниваем нулю. Получаем два уравнения

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{4}x_k^2 + b\sum_{k=1}^{4}x_k - \sum_{k=1}^{4}x_k y_k = 0 \\ a\sum_{k=1}^{4}x_k + 4b - \sum_{k=1}^{4}y_k = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

из которых и находим значение a и b:

$$a = 0{,}2936; \quad b = 15{,}15; \qquad (21)$$

$$y = 0{,}2936\,x + 15{,}15.$$

Вычисляя y по этой формуле для наших основных точек, сравним y вычисленный с y действительным.

x	$y_{выч.}$	y	$\Delta y'$
17,6	20,22	20	+0,22
84,2	39,87	40	−0,13
150,6	59,37	60	−0,63
222,0	80,33	80	+0,33

Максимальная погрешность клина

$$(\Delta y')_{max} = 0{,}63 \text{ мм}$$

или, если перейти от графика к самому клину

$$(\Delta y')_{max} = \frac{0{,}63}{40}\lambda = 0{,}013\,\lambda,$$

а средняя погрешность $\overline{\Delta y'} = 0{,}33$,
т. е.

$$\overline{\Delta y'} = \frac{0{,}33}{40}\lambda = 0{,}008\,\lambda.$$

Можно еще вычислить погрешность измерения клина Δy. У нас средняя погрешность в определении положения минимумов

$$\Delta x = 0{,}035$$

или, в масштабе чертежа,

$$\Delta x = 0{,}7 \text{ мм}.$$

Это отвечает погрешности в определении y

$$\Delta y = a\Delta x = 0{,}2936\ 0{,}7 = 0{,}21 \text{ мм (на графике)}$$

или для самого клина

$$\Delta y = \frac{0{,}21}{40}\lambda = 0{,}005\,\lambda.$$

Мы видим, что обе погрешности Δy и $\Delta y'$ одного порядка. Мы пользовались светом с длиной волны $\lambda = 0{,}546\ \mu$; следовательно

$$\Delta y' = 0{,}008\ 0{,}546\ \mu = 0{,}004\ \mu;$$
$$\Delta y = 0{,}005\ 0{,}546\ \mu = 0{,}003\ \mu.$$

Применяя клин № 6 для практических измерений, мы пользовались не выведенной нами сейчас прямой, а прямой, проходящей через минимумы, лежащие в непосредственной близости к метке, т. е. через точки первого, второго и третьего минимумов (метка была у нас между первым и вторым минимумами), пренебрегая учетом четвертого минимума.

Вообще говоря, можно было бы точнее промерить клин вблизи метки, пользуясь другими длинами волн. Мы, однако, пока этого не делали.

Положение метки определялось только относительно двух соседних минимумов, и поэтому благодаря малой протяженности

дисторсия линзы не была опасна. Вместе с тем здесь линза становилась почти необходимой, так как очень тонкая царапина, служащая меткой, плохо видна при теневой проекции. Для всех промеров относительно метки мы и пользовались полной схемой рис. 11.

Результаты каждого измерения						Средн.	Средн. ошибка Δx
Положение 1-го минимума x_1	43,20	43,25	43,18	43,20	43,27	43,22	0,03
Положение метки x_0 . .	41,80	41,81	41,81	41,80	41,81	41,81	0,00
Положение 2-го минимума x_2	39,54	39,53	39,53	39,56	39,57	39,55	0,02

Пользуясь формулой (14), находим r_1:

$$r_1 = \frac{43,22 - 41,81}{43,22 - 39,55} = \frac{1,41}{3,67} = 0,384.$$

Найдем погрешность этой величины Δr_1:

$$\Delta r_1 = \Delta \frac{a}{b} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2} = \frac{1,41 \cdot 0,03 + 3,67 \cdot 0,02}{3,67^2} = 0,009.$$

Итак,

$$r_1 = 0,384 \pm 0,009.$$

Подобный же подсчет дает

$$r_2 = 0,616.$$

(Этот подсчет в сущности служит только для проверки вычислений, ибо, конечно, должно быть $r_1 + r_2 = 1$.)

Аналогичные измерения, произведенные над другой фотографией, сделанной без линзы, дали

$$r_1 = \frac{1,26}{3,33} = 0.384.$$

Совпадение результата подтверждает наше допущение, что линза не вносила существенного искажения на участке малой протяженности.

ПРОБНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Ряд концевых мер различных фирм был исследован нами в Оптической лаборатории ВИИМ'а.[1] Первой была исследована плитка Иоганссона.

Клин № 6 на плитке Иоганссона, класс АА, разм. 0,150".

---

[1] Пользуемся случаем выразить благодарность М. Ф. Романовой и другим сотрудникам Оптической лаборатории, которые с полной готовностью оказывали всяческое содействие нашей работе.

Полож. 1-го минимума	24,08	24,13	24,14	24,15	24,22	$x_1 = 24,14$	$\Delta x_1 = 0,03$
„ метки	26,50	26,49	26,47	26,48	26,48	$x_0 = 26,48$	$\Delta x_0 = 0,01$
„ 2-го минимума	27,93	27,90	27,92	28,11	27,96	$x_2 = 27,96$	$\Delta x_2 = 0,05$

$$r_1' = \frac{26,48 - 24,14}{27,96 - 24,14} = \frac{2,34}{3,82} = 0,612$$

$$r_2' = \frac{27,96 - 26,48}{27,96 - 24,14} = \frac{1,48}{3,82} = 0,388$$

$$r_1' - r_1 = 0,612 - 0,384 = 0,228$$

$$r_2 - r_2' = 0,616 - 0,388 = 0,228$$

Так как у нас $\lambda = 0,546\,\mu$ по формуле (16):

$$p' = 0,228\,\frac{0,546\,\mu}{2} = 0,062\,\mu.$$

Т. Н. Крылова [4] производила измерение величины p для плиток Иоганссона по методу Kösters'а и получила результат

$$p = (0,064 \pm 0,014)\,\mu.$$

Не приводя более подробностей, укажем только результаты некоторых наших измерений величин p' на других плитках: плитка завода „Красный Инструментальщик“ 3,5 мм:

$$p' = 0,062\,\mu;$$

плитка Цейса 3,5 мм:

$$p' = 0,033\,\mu;$$

плитка Вернера 3,5 мм:

$$p' = 0,025\,\mu;$$

плитка Цейса 3 мм, зеркальная полировка:

$$p' = -0,0016\,\mu.$$

Точность метода.

p' определяется у нас как разность двух величин r_1 и r_1', умноженная на половину длины волны.

Погрешность r мы уже определяли:

$$\Delta r_1 = 0,009.$$

Определяя погрешность r_1', мы должны помимо погрешности наблюдения Δx, которая непосредственно указана в таблице измерений, учесть еще погрешность, проистекающую от неточности клина, т. е. $\Delta x'$, зависящую от $\Delta y'$. Пользуясь прямой (21), мы легко можем высчитать, что если $\Delta y' = 0,008\,\lambda$, то соответствующая $\Delta x' = 0,06$ мм. Таким образом, в выражении для r_1' погрешность числителя будет

$$0,06 + 0,02 + 0,01 = 0,10 \text{ мм};$$

погрешность знаменателя

$$0,06 + 0,05 + 0,01 = 0,12 \text{ мм};$$

$$\Delta r_1' = \frac{2,34 \cdot 0,12 + 3,8 \cdot 0,10}{3,8^2} = \frac{0,28 + 0,38}{14,4} = \frac{0,66}{14,4} = 0,046.$$

Итак,

$$\Delta p' = (0,009 + 0,046) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,546\, \mu = 0,015\, \mu.$$

Ввиду очень малой разности хода в нашем клине поправок на температуру, на давление, на влажность можно не производить и погрешностью за счет этих факторов — пренебречь. Поэтому можно считать, что определенная нами для плитки Иогансcона величина p' будет

$$p' = (0,062 \pm 0,015)\, \mu.$$

Погрешность других наших результатов не превышает вычисленной сейчас погрешности для плитки Иоганссона. Отрицательную величину для p' у плитки Цейса нужно, очевидно, отнести за счет погрешности. Мы должны просто считать, что здесь p' близко к нулю.

Мы оценили погрешность довольно грубо. Детальнее степень точности нашего метода может быть установлена в результате более значительного опыта его применения. Нам кажется, однако, что в этом предварительном определении мы скорее сильно преувеличили, чем преуменьшили погрешность наших измерений.

ТОЛЩИНА ПРИТИРОЧНОГО СЛОЯ

Наибольшим недостатком нашего метода является то, что он определяет не самую поправку на скачок фазы p, а другую величину, p', которая, как мы знаем, равна

$$p' = p + t,$$

где t — толщина притирочного слоя.

Нужно сказать, что все методы определения поправки на скачок фазы осложнены вопросом о контакте. В методе колец Ньютона стекло не притирается к металлу, но контакт связан с еще более сложным явлением упругой деформации. В других методах приходится допустить, что толщина притирочного слоя постоянна при всех притирках. Да собственно само применение концевых мер требует такого допущения, ибо, как мы уже говорили, длина концевой меры определяется как расстояние между ее механическими плоскостями плюс толщина притирочного слоя.

Между тем различные авторы дают крайне разноречивые сведения о толщине притирочного слоя. Rolt и Barrell [5] указывают что для хорошо полированной стали

$$t = 0,005\, \mu,$$

т. е. величиной t в большинстве случаев можно просто пренебрегать.

Peters и Boyd [6] утверждают, что притирочный слой может доходить до

$$t = 0,07\, \mu.$$

Вот, примерно, крайние границы для колебаний t у различных авторов, если не считать величины, даваемой Пераром и Моде.

$$t = -0{,}06\,\mu.$$

Если, как обычно приходится допускать, считать величину t постоянной, то метод Kösters'а в соединении с нашим методом дает возможность определить t.

Для этого можно наметить такой путь.

Пусть мера притерта на стальную поверхность. Пусть поправка на скачок фазы для поверхности меры p_1, для поверхности, к которой мера притерта, p_2. Определив при помощи интерферометра Kösters'а оптическую длину меры в этих условиях, получим некоторую величину l_a^0. Механическая длина меры l^m, очевидно, будет

$$l^m = l_a^0 + p_1 - p_2.$$

Притрем теперь ту же меру к кварцу и найдем новую оптическую длину l_q^0. Опять получим

$$l^m = l_q^0 + p_1.$$

В обоих равенствах прибавим и вычтем t. Так как

$$p' = p + t$$

$$l^m = l_a^0 + p_1' - p_2'$$

$$l^m = l_q^0 + p_1' - t.$$

Решая систему для t, получим

$$t = p_2' - (l_a^0 - l_q^0).$$

Все стоящие здесь справа величины поддаются измерению: p_2' при помощи нашего метода, l_a^0 и l_q^0 при помощи интерферометра Kösters'а.

Найдя таким образом t, его величину можно потом всегда вычитать из p', переходя этим путем к истинной поправке на скачок фазы p.

Мы, однако, не находили значения t, считая, что вопрос о притирочном слое требует отдельного, более углубленного исследования.

КОНСТРУКТИВНОЕ ОФОРМЛЕНИЕ МЕТОДА

Мы приступили сейчас к разработке чертежей прибора, который будет представлять собой конструктивное оформление нового метода определения поправки на скачок фазы. В этом приборе над тем местом, где вставляется кассета, будет помещаться лупа на микрометренном винте так, что измерения можно будет производить не только по фотографии, но и визуально. При таком способе определение p' для данной поверхности будет требовать не более 20—30 минут.

Величину p' можно будет измерять для разных длин волн и таким образом определить дисперсию скачка фазы. Заметим,

что дисперсию можно определить при одной и той же притирке клина к мере так, что разница между p и p' здесь значения не имеет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Временник Гл. Палаты мер и весов, вып. 4 (16), 1930.
2. Pérard et Maudet, Trav. Bur. int. Pd. Ms., XVII, 1927.
3. Kösters, Procès verbaux des séances, t. XVIII, p. 60, session de 1937.
4. Временник Гл. палаты мер и весов, вып. 4 (16), стр. 144, 1930.
5. Rolt and Barrell, Proc. Roy. Soc. A., London, Ser. A., vol. 116, p. 401, 1927.
6. Peters and Boyd, Sci. Papere Bureau Standards, 17, p. 691, 1922.

ЭЛЕКТРОНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ СОЛЕЙ

М. А. Румш и *И. К. Задорожный*

В работе В. А. Колпинского, помещенной в № 14 „Ученых Записок ЛГУ" (сер. физ. наук, вып. 3, 1937), излагается разработанный им метод архитектурного исследования тонких пленок поликристаллического строения: метод исследования величины формы и ориентации кристалликов, образующих слой.

Этот метод позволил выяснить, что щелочно-галоидные соли, кристаллизуясь из пара на целлулоидную подкладку, в зависимости от вида соли обнаруживают в некоторых случаях тенденцию кристалликов ориентироваться относительно плоскости подкладки. Было выяснено, например, что NaCl дает слои, ориентированные относительно плоскости подкладки; вместе с тем такая соль, как LiF, не показывала никаких признаков ориентации. Другие соли давали слои с тем или иным процентом ориентированных кристалликов. Так как все щелочно-галоидные соли кубической системы, то объяснить ту или иную тенденцию к ориентации геометрией не представляется возможным. Объяснением, очевидно, могли служить другие физико-химические свойства, меняющиеся от соли к соли и, таким образом, по-разному направляющие процесс кристаллизации.

Ранее чем связывать свойства кристаллизоваться ориентированно относительно подкладки с каким-либо физико-химическим свойством соли — необходимо было выяснить степень тенденции всех щелочно-галоидных солей к ориентации и только на этой основе пытаться дать решение.

Этим вопросом мы занимались в 4-й лаборатории Физфака ЛГУ.

Отсылая читателя, интересующегося теорией архитектурного исследования, к упомянутой статье В. А. Колпинского, мы ограничимся классификацией электронограмм, получаемых при просвечивании поликристаллических слоев, указав, чем определяется тот или другой вид электронограмм.

Мы приводим шесть типичных электронограмм. Электронограммы, изображенные на рис. 1 и 2, соответствуют мелкокристаллическому образцу, в котором отсутствует какая-либо ориентация.

При любом положении пленки относительно пучка они содержат ряд разрешенных структурным множителем колец Дебая-Шеррера, интенсивность вдоль которых остается постоянной. Различная ширина колец на них свидетельствует о различной величине кристалликов в соответствующих им слоях соли.

Электронограммы, изображенные на рис. 3 и 4, соответствуют слою соли, кристаллики которого ориентированы относительно подкладки. В противоположность неориентированным слоям, слои, состоящие из ориентированных кристалликов, дают диффракционную картину, зависящую от угла поворота пленки относительно пучка. Электронограмма рис. 3 получена при пучке почти перпендикулярном к пленке. Она содержит только кольца $hk0$, которые благодаря не совсем перпендикулярному падению пучка интенсивны лишь в местах пересечения нулевым эллипсом Лауэ. Электронограмма (рис. 4) получена при пучке, наклонно падающем на пленку. Кольца Дебая-Шеррера на ней интенсивны лишь в местах пересечения их гиперболами Лауэ.

Отсутствие колец hkl для $l \neq 0$ при перпендикулярном просвечивании и неравномерность интенсивности при наклонном просвечивании свидетельствуют о наличии ориентации кристалликов слоя относительно плоскости подкладки.

Электронограммы на рис. 5 и 6 свидетельствуют о частичной ориентации слоев соли. Повышенная интенсивность колец в местах пересечения их гиперболами Лауэ говорит о наличии ориентированных кристалликов в слое; в то же время интенсивность на всем протяжении колец свидетельствует о присутствии и неориентированных кристалликов. Более резкая картина рис. 5 по сравнению с картиной рис. 6 объясняется различной величиной кристалликов.

Перпендикулярное просвечивание частично ориентированных слоев дает картину, подобную рис. 1 и 2, но кольца hkl при $l \neq 0$ менее интенсивны.

Итак, по виду электронограмм перпендикулярного и наклонного просвечивания можно говорить о наличии полной или частичной ориентации, а из сравнения резкости картины говорить о размерах кристалликов.

В противоположность утверждениям о способности солей кристаллизоваться ориентированно относительно целлулоидной (аморфной) подкладки, нами установлена общая для всех щелочногалоидных солей способность при распылении в вакууме давать неориентированные соли. Слои, приготовляемые в вакууме и исследованные до действия на них атмосферы (мы приготовляли слои в вакууме электронографа), оказываются без исключения дезориентированными. Им соответствуют картины, изображенные на рис. 1 и 2. Замеченная ранее ориентация, например, соли NaCl есть по существу результат последующей перекристаллизации слоя при внесении его в атмосферу. Удалось выяснить, что фактором, определяющим перекристаллизацию, являются пары воды. Пленки, подверженные действию сухого воздуха (в прибор впускался воздух через змеевик, погруженный в жидкий кислород),

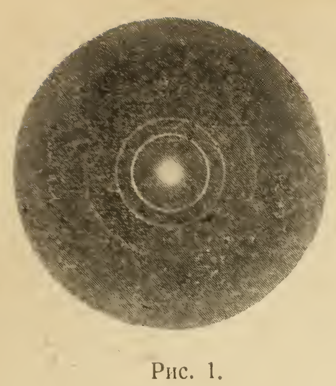


Рис. 1.

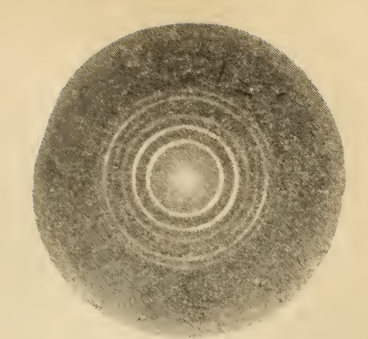


Рис. 2.

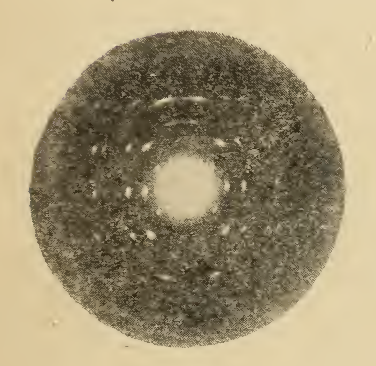


Рис. 3.

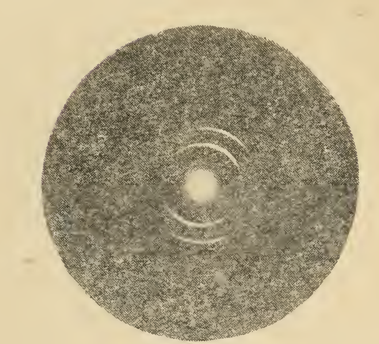


Рис. 4

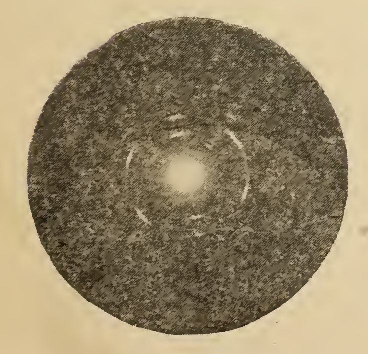


Рис. 5.

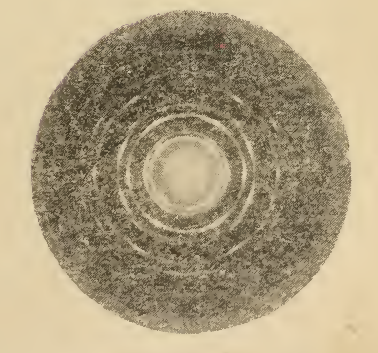


Рис. 6.

равно как и выдержанные в вакууме в течение 3—4 часов, оставались дезориентированными. Действие комнатного воздуха или чистых паров воды в течение 1—2 минут приводило к перекристаллизации. Установив таким образом полную дезориентацию слоев до действия атмосферы и установив, чем обусловлен процесс ориентации, мы можем дать следующую схему образования пленки соли и ее поведения под действием паров воды.

Зеркальная в оптическом смысле поверхность аморфного целлулоида в масштабах зарождающихся кристалликов есть поверхность неровная. Своими неровностями она определяет всевозможные направления роста кристалликов. Поэтому образующиеся кристаллики оказались дезориентированными. Рис. 7 поясняет это.

Однако, коль скоро кристаллики выросли, неровности поверхности в масштабе выросших кристалликов исчезают. Поверхность

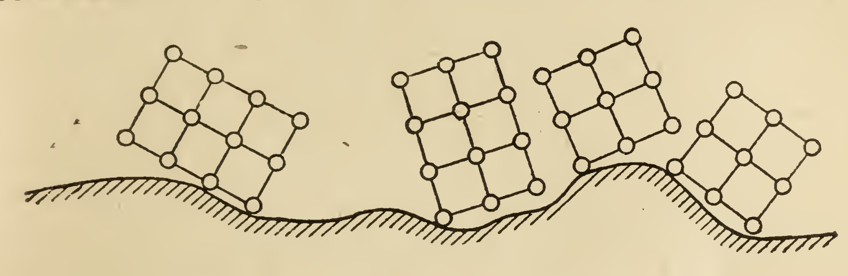


Рис. 7.

целлулоидной подкладки по отношению к выросшим кристалликам становится плоскостью и выделяет определенное направление для ориентации. Ориентацию кристалликов производит посторонний агент — вода. Вода, адсорбируясь на поверхности кристалликов и конденсируясь в тончайших порах образца, повидимому приводит к возникновению силовых взаимодействий как между кристалликами, так и между кристалликами и подкладкой.

Эти силы и ориентируют кристаллики в пленке.

Что касается количества тем или иным образом связывающейся с солью воды, мы заметим, что ее явно мало для эффектов растворения и выкристаллизации, но достаточно для того, чтобы можно было с некоторой осторожностью говорить о жидкой фазе воды, присутствующей в порах пленки.

Нами замечено следующее: диффракционная картина от пленки, подверженной действию паров воды, сразу после откачки паров из прибора сопровождается сильным фоном некогерентно рассеянных электронов.

По мере откачки фон исчезает, и в процессе исчезновения фона происходит ориентация. Фактом обогащения пленки водою можно объяснить рост фона, ибо то, что мы принимаем в диффракционной картине от кристалла за некогерентный фон, в этом случае пополняется когерентной и некогерентной частью рассеяния молекулами воды.

Выяснив таким образом картину ориентации, мы остановимся на замеченном нами втором процессе, идущем в пленке, — процессе укрупнения кристалликов.

Оказалось, что электронограммы от слоев, подверженных действию воды, получаются более резкими. Резкость колец, как указывалось, свидетельствует об укрупнении кристалликов; поэтому мы утверждаем, что, помимо ориентирующего действия, пары воды производят укрупнение кристалликов.

Отказываясь от объяснения роста кристалликов путем выкристаллизации соли из раствора, мы допускаем возможность поворота кристалликов друг относительно друга до совмещения граней теми же силами, которые ориентировали пленки.

По мере того как откачивается слой воды, разделяющий кристаллики, начинают действовать молекулярные силы. Эти силы поворачивают и сдвигают кристаллики друг относительно друга до совпадения атомных цепочек, т. е. до образования монокристалла. Выяснив таким образом два течения рекристаллизации, мы показали, что, независимо от вида соли, в толстых слоях преобладает укрупнение, тогда как в тонких — ориентация. Это положение, между прочим, объясняет отсутствие ориентации соли LiF, замеченное в предыдущих исследованиях.

Рассеивающая способность атомов увеличивается с ростом порядкового номера Z. Как у Li так и у F Z мало, и потому и Li и F рассеивают слабо. Для получения достаточно интенсивной картины изготовлялись пленки значительной толщины, которая и определяла течение процесса рекристаллизации.

Нами был изготовлен тончайший слой соли LiF, который под действием воды дал полную ориентацию.

По отношению к этим двум видам рекристаллизации различные соли, как показал экспериментальный материал, охватывающий почти все щелочно-галоидные соли, можно расположить в ряд по убыванию тенденции ориентироваться относительно подкладки и росту тенденции укрупняться. Так, например, KBr почти не укрупняет своих кристалликов, а ориентируется на 100 процентов. Электронограммы от пленок KBr, подверженных действию воды, были попрежнему диффузны, и кольца распадались на отдельные точки (рис. 3 и 4). Соль NaJ почти не ориентировалась, зато давала большое укрупнение кристалликов. Даже очень тонкие пленки NaJ, подверженные действию воды, давали картину, не зависящую от наклона пучка.

Другие соли заполняют промежуточные места этого ряда; им свойственна тенденция как ориентироваться, так и укрупняться в той или иной степени.

Объяснить это свойство солей можно преобладанием сил, возникающих между кристалликами и подкладкой.

Мы остановимся, наконец, на первом нашем утверждении о том, что испарение в вакууме на целлулоидную подкладку дает без исключения дезориентированные соли. Это утверждение может вызвать недоумение у исследователей, ранее занимавшихся этими вопросами.

Дело в том, что для получения дезориентированного слоя необходимо до распыления длительно (1—2 часа) прокаливать в вакууме распыляемую соль с тем, чтобы гарантировать отсутствие воды в тончайших порах, которые всегда ею заполнены. Опыт показал, что без такого прокаливания иногда получаются слои, частично ориентированные. Так как ориентация, как выяснилось, определяется присутствием паров воды, следует показать, что вода из пор распыляемой соли испаряется вместе с ее возгонкой и, заполняя прибор, частично садится на пленку вместе с образующимся слоем соли, вызывая его ориентацию.

Это явление наиболее резко заметно на гигроскопичной соли LiBr; однако прокаливание ее в вакууме позволяет получать вполне дезориентированные слои.

Итак, пленки соли, полученные испарением в вакууме на целлулоидную подкладку, при условии предварительного прокаливания соли, всегда дезориентированы. Пленки, подверженные действию воды, оказываются измененными. Изменение сводится к укрупнению кристалликов и к ориентации относительно подкладки. В зависимости от вида соли преобладает укрупнение или ориентация и независимо от вида соли преобладает укрупнение в толстых слоях и ориентация — в тонких.

Пользуемся случаем выразить благодарность доц. В. А. Колпинскому, руководившему работой, за целый ряд указаний и советов.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВТОРИЧНОЙ ЭМИССИИ С ЖЕЛЕЗА

Н. Н. Ростов и *А. Е. Фомин*

1. При бомбардировке какой-либо поверхности пучком электронов можно наблюдать поток вторичных электронов, источником которых является бомбардируемая поверхность. Эта вторичная эмиссия состоит отчасти из упруго отраженных электронов первичного пучка и отчасти из вновь вырванных электронов. Коэффициентом вторичной эмиссии σ называется отношение числа всех вторичных электронов к числу первичных.

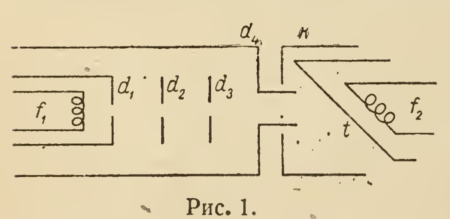


Рис. 1.

Исследование вторичной эмиссии вблизи точек кристаллических переходов может пролить новый свет не только на природу вторичной эмиссии, но и на процессы, связанные с изменением кристаллической решетки.

Температурная зависимость вторичной эмиссии с ферромагнитных тел исследовалась П. С. Тартаковским [1], Гайакава [2], Трелором и Лэндоном [3] и П. М. Морозовым [4]. У Тартаковского и Гайакава получилась более или менее линейная зависимость коэффициента вторичной эмиссии от температуры, имеющая перегиб в точке Кюри. Это заставляет предполагать, что на исследуемый процесс накладывались какие-то побочные процессы. У Трелора и Лэндона и у Морозова были получены отрицательные результаты при нормальном падении первичного пучка. Нормальное падение, может быть, несколько уменьшает вероятность выхода вторичных электронов с M уровня, обусловливающих ферромагнетизм, и валентных электронов, [1] снижая тем самым чувствительность к каким-либо изменениям вблизи точки Кюри.

2. Схематический чертеж прибора, применявшегося в этой работе, воспроизведен на рис. 1.

Первичные электроны, испускаемые вольфрамовой нитью f_1, сжимаются в узкий пучок четырьмя диафрагмами d_1, d_2, d_3, d_4,

[1] В случае нормального падения первичного пучка электроны в поверхностном слое испытывают преимущественно лобовые удары, и поэтому вероятнее, что они проходят вглубь, а не выбрасываются наружу.

на которые подавались соответственно потенциалы: 240V, 100V, 100V и V_0+5V, где V_0 — потенциал мишени t относительно нити f_1, определяющий скорость первичного пучка. [1]

Первичный пучок падает под углом, примерно, в 45° на железную мишень t, которая представляет собою стальную пластинку, укрепленную на танталовом цилиндре. Внутри последнего находится вольфрамовая нить f_2, нагревающая мишень лучеиспусканием до 1000° C. Вторичные электроны попадают на коллектор k, на который подавался потенциал на 5V больший, чем скорость первичного пучка, что обеспечивало полное вытягивание вторичных электронов.

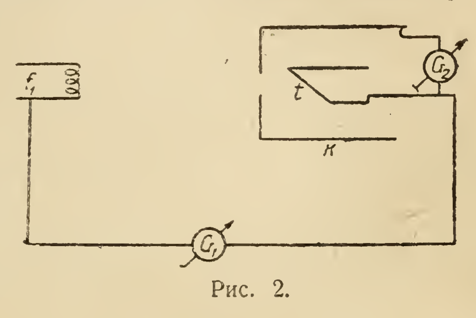


Рис. 2.

Для измерения σ применялась схема рис. 2, где по гальванометру G_1 отсчитывался первичный ток, а по G_2 вторичная эмиссия.

Все измерения производились зеркальными гальванометрами Института Физического Приборостроения НКПРОС РСФСР при субъективном методе отсчета.

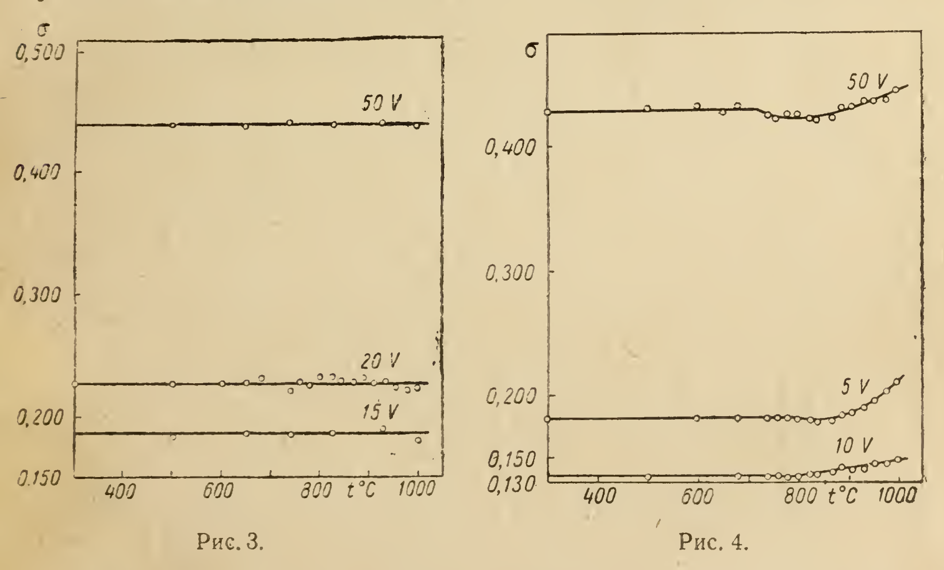


Рис. 3. Рис. 4.

Температура измерялась оптическим пирометром. Для поглощения остатков газа применялся бариевый геттер, что обеспечивало высокий вакуум в отпаянном приборе, несмотря на длительную работу при высоких температурах.

3. Как показывают приведенные графики (рис. 3) и табл. 1, с точностью до 3% никакой температурной зависимости коэффи-

[1] V_0 не больше 50V.

циента вторичной эмиссии не наблюдалось. Принимая во внимание пологое падение первичного пучка, можно сделать предположение, что чувствительность к возможным изменениям σ в этой работе несколько выше, чем в работах предыдущих авторов.

ТАБЛИЦА 1

Температуры (°C)	Скорости первичных электронов		
	15V	20V	50V
300	—	0,227	—
500	0,183	0,227	0,439
600	—	0,227	—
650	0,186	0,228	0,438
680	—	0,231	—
740	0,185	0,221	0,440
760	—	0,229	—
780	—	0,226	—
800	—	0,232	—
825	0,187	0,232	0,439
845	—	0,230	—
870 по пирометру	—	0,229	—
890	—	0,232	—
910	—	0,227	—
935	—	0,229	—
955	0,190	0,224	0,440
980	—	0,222	—
1 000	0,180	0,223	0,437

ТАБЛИЦА 2

Температуры (°C)	Скорости первичных электронов		
	5V	10V	50V
300	0,182	—	0,428
500	—	0,135	0,430
600	0,182	—	0,431
650	—	—	0,427
680	0,182	0,135	0,431
740	0,182	0,135	0,424
760	0,182	0,135	0,421
780	0,181	0,134	0,425
800	0,181	0,135	0,425
825	0,180	0,137	0,421
845	0,179	0,137	0,420
870 по пирометру	0,180	0,139	0,422
890	0,184	0,142	0,430
910	0,187	0,140	0,431
935	0,190	0,140	0,435
955	0,194	0,145	0,434
980	0,203	0,145	0 436
1 000	0,210	0,148	0,444

В тех случаях, когда нами не применялся ускоряющий потенциал на коллектор относительно мишени, были получены графики, имеющие перегиб в области точки Кюри и схожие по виду с гра-

фиками Тартаковского и Гайакава (см. рис. 4 и табл. 2). Повидимому, в этих случаях на ход σ влияют контактные разности потенциалов и магнитное поле нити, подогревающей мишень (действие последнего резко меняется от присутствия железа в ферро- или парамагнитном состоянии).

СОДЕРЖАНИЕ СТАТЬИ

Определялась величина коэффициента вторичной эмиссии при различных температурах мишени от 300 до 1000° С. Применялось пологое падение первичного пучка. Опыты не обнаружили температурной зависимости для σ. Выяснены условия, в которых наблюдаются изменения, обнаруженные П. С. Тартаковским и Гайакава.

В заключение считаем долгом выразить глубочайшую признательность доц. М. С. Косману за руководство, критику и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tartakowsky P. und Kudrjawzewa W., Z. Phys. **75**, 137, 1932.
2. Hayakawa K., Sci. Rep. Tohoku Univ. **22**, 924, 1933.
3. Treloar L. and Landon D., Proc. Phys. Soc., **50**, 625, 1938.
4. Работа П. М. Морозова — доложена на конференции по вторичной эмиссии (февраль 1939 г.).

АНАЛИЗ ИОНОВ, ИСПУСКАЕМЫХ РАСКАЛЕННЫМ СТЕКЛОМ, ПО МЕТОДУ БУША

М. С. Косман, В. Н. Жихарев и *Н. И. Калитеевский*

Разработанная Бушем теория движения заряженной частицы в продольном поле с аксиальной симметрией нашла себе широкое применение при исследовании свойств легких частиц $\left(\text{определение } \frac{e}{m} \text{ для термоэлектронов, фокусировка } \beta\text{-частиц и т. д.}\right)$. Теория дает формулу:

$$I^2 = \frac{(H\rho)^2}{cf}, \qquad (1)$$

где I — сила тока в катушке; f — фокусное расстояние; H — магнитное поле; ρ — радиус кривизны; c — постоянная катушки.

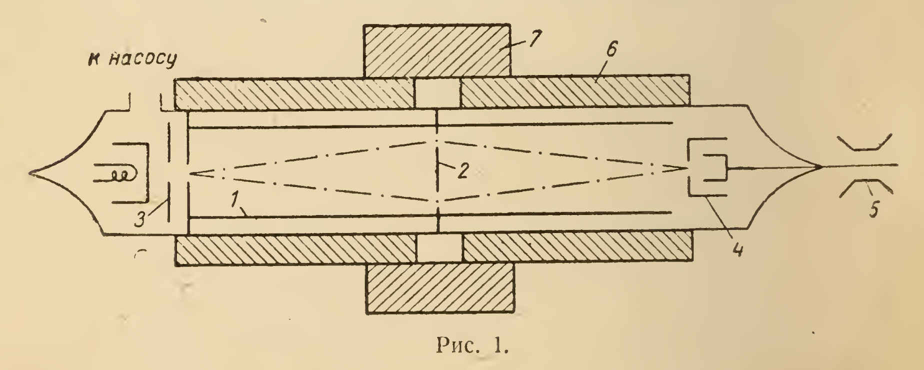


Рис. 1.

Из этой формулы, при заданных размерах прибора и постоянной катушки, мы можем подсчитать силу тока, необходимую для фокусировки частиц определенной массы и скорости. Задачей настоящей работы является магнитный анализ ионов, испускаемых раскаленным стеклом, при помощи метода Буша. Конструкция прибора видна из прилагаемого чертежа (рис. 1). Основной частью является медная труба *(1)* диаметром 4 см и длиной 40 см, с входным отверстием диаметром в 0,8 мм и перегородкой в центре *(2)*, защищающей от прямого попадания ионов в фарадеев цилиндр. Ионы испускаются раскаленным стеклом, подогреваемым вольфрамовой спиралью, ускоряются первым анодом *(3)*,

проходят электрическое поле между первым анодом и трубой (являющейся вторым анодом) и дальше летят в пространстве, свободном от электрического поля. Загибая ионы при помощи магнитной линзы, мы можем сфокусировать их на отверстие (также диаметром в 0,8 мм), сделанное в охране фарадеевого цилиндра *(4)*. Измерения тока, попадающего на фарадеев цилиндр, производились чувствительным электрометром (Lindeman) *(5)*. Максимальные токи были $\sim 10^{-11}$ A. Прибор находился под откачкой, так как для возможности измерений требовался высокий вакуум. Вся лампа была вставлена в железную трубу *(6)*, соединенную посредине латунным кольцом с нарезкой, а поверх трубы была надета катушка с водяным охлаждением *(7)*. Железная труба, устроенная таким образом, значительно увеличивала постоянную катушки, а кроме того позволяла варьировать ее эффективную ширину. Интенсивность попадающего в фарадеев цилиндр пучка существенно зависела от соотношения потенциалов на двух анодах. Практика показала, что наилучшие результаты получались при потенциале на первом аноде $\sim 10\%$ от потенциала второго анода. Действительно, увеличивая потенциал на втором аноде относительно первого, мы, очевидно, должны увеличить концентрацию ионов, прошедших первое отверстие.

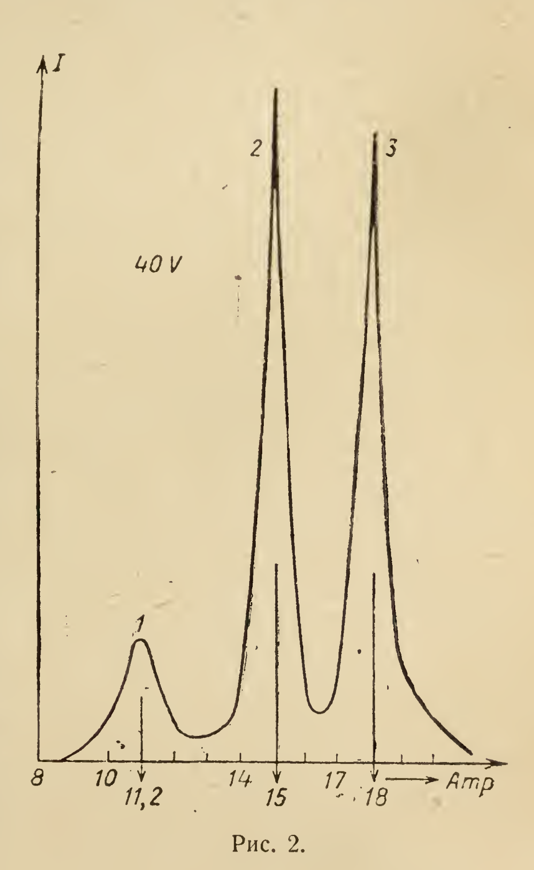


Рис. 2.

Подсчет $(H\rho)$ для ионов щелочных металлов, ускоренных полем ~ 40 V, дает значения $H\rho \sim 5000$ гаусс-см, и таким образом, имея катушку с постоянной $\sim 30\,000$ гаусс-см и прибор с фокусным расстоянием ~ 10 см, мы можем проводить масс-спектрографические исследования ионов, пропуская через катушку ток меньше 20 А. Рис. 2 приводит результат исследования ионов, летящих с молибденового стекла при ускоряющем потенциале на втором аноде в 40 V. Наиболее устойчивым и постоянным по интенсивности был максимум № 2, в то время как максимум № 3, очень интенсивный к моменту начала измерений, значительно ослабевал часа через два-три и почти совсем исчезал к концу дня. Для даль-

нейших исследований конструкция прибора была несколько изменена. На реконструированном приборе, снабженном шлифом, позволяющим менять испускающий ионы объект, были сняты кривые, изображенные на рис. 3 и 4. Измерения производились при 20, 15 и 10 V ускоряющего потенциала. Как видно, всюду имеют место два максимума, которые были довольно постоянны по интенсивности, а на рис. 4 (для ускоряющего потенциала 10 V) при больших значениях фокусирующего тока наблюдается максимум малой интенсивности, но вполне достоверный, так как фон был чрезвычайно мал. Расшифровку кривых нужно производить, исходя из следующих соображений.

Как это следует из формулы (1),

$$I^2 \sim (H\rho)^2,$$

а так как

$$(H\rho)^2 \sim \frac{m}{e} V,$$

то для частиц одной скорости

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{m_1}{m_2}, \qquad (2)$$

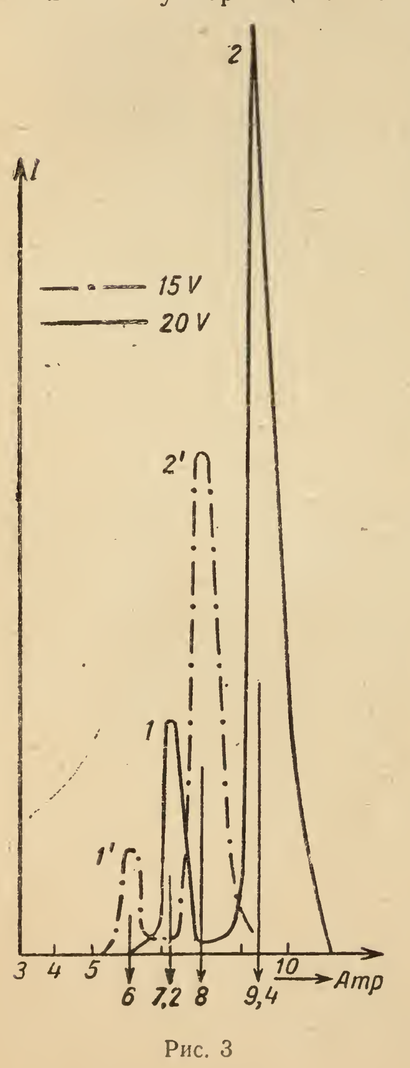


Рис. 3

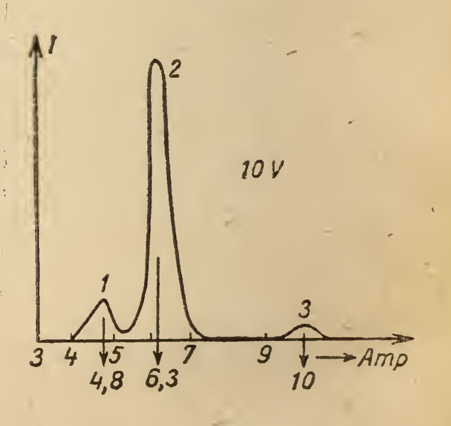


Рис. 4.

где m_1 и m_2 массы частиц, а I_1 и I_2 — силы тока в катушке, при которых имеет место максимум. Задавшись $m_2 = 39$ (калий), мы получаем для первого максимума значения массы, в пределах 4% отвечающей массе натрия, что имеет место на всех четырех кривых.

Максимум № 3 на кривой для 10 V дает значение массы иона ~ 100, что в пределах точности вычислений соответствует

массе молибдена, ионы которого могли испускаться раскаленной подставкой для стекла. Максимум № 3 (рис. 1), который не был замечен в новой конструкции прибора, дает значение для массы 56, близкое к массе никеля. Все молибденовые части сваривались через никель, а поэтому наличие в приборе ионов никеля вполне возможно. Падение интенсивности также становится понятным, так как расплавленное стекло может захватить ионы никеля, которые сравнительно быстро улетучиваются при последующем разогревании. Найденные нами максимумы тока, соответствующие никелю и молибдену, которые мы не относим к составным частям самого стекла, требуют дополнительной проверки путем соответствующих контрольных опытов. Проверка взаимного расположения максимумов, соответствующих одной массе, но разным скоростям, не дает точной зависимости $I^2 \sim V$, что может быть объяснено некоторым искажением поля медной трубой, так что расшифровку следует вести по кривой данной скорости и лишь сравнивать результаты с другими скоростями.

Резюмируя, следует заметить, что магнитный спектрограф описанного типа является дешевым и не требующим большой тщательности в подгонке деталей прибором, который может дать вполне удовлетворительные по точности результаты и при равных интенсивностях разделить массы, отличающиеся на 2—3 атомных единицы.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА МОЛТЕРА

М. С. Косман, Ю. Э. Залкинд и *М. Э. Залкинд*

В 1936 г. Malter[1] обнаружил, что ток с поверхности тонкой пленки окиси алюминия, покрывающей алюминиевую пластинку, во-первых, значительно превышает ток, который следует

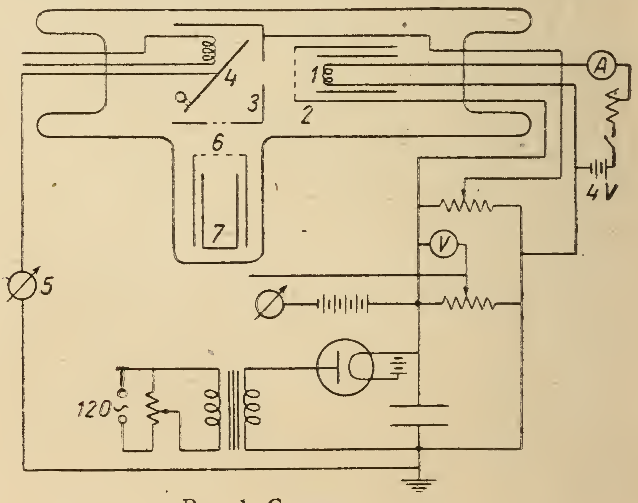


Рис. 1. Схема установки.

ожидать при обычной вторичной эмиссии с диэлектрика, и, во-вторых, продолжает итти в течение продолжительного времени после прекращения бомбардировки.

Объяснение этому явлению, по мнению Молтера, можно дать следующее. В результате вторичной эмиссии (если коэффициент вторичной эмиссии больше единицы) на поверхности образуется некоторый положительный потенциал. Если заземлить металлическую подкладку мишени, то между верхней и нижней поверхностями пленки, в силу ее малой толщины, создается сильное электрическое поле, которое вырывает электроны из подкладки.

Установка, которой мы пользовались при исследовании этого эффекта, изображена на рис. 1. С катодной нити *1* электронной

[1] Malter, Phys. Rev., 1936, Vol. 50, № 1.

пушки электроны, проходя через ускоряющий цилиндр *2* и отверстие в коллекторе *3*, попадают на мишень *4* с исследуемым диэлектриком. Ток измерялся гальванометром *5*, соединенным с подкладкой мишени. Возможность замены одного диэлектрика другим была достигнута следующим образом. Никелевый диск, свободно вращающийся вокруг оси, был разделен на четыре сектора, каждый из которых покрывался одним из исследуемых диэлектриков (окись алюминия, слюда толщиной 3 μ и 10 μ и окись магния). Поворачивая диск, можно было подводить под отверстие в коллекторе желаемый диэлектрик.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пленка окиси алюминия, исследованная Молтером, была получена специальной обработкой поверхности алюминия. Нами этот эффект был получен также с тонкой пластинки слюды и слоя окиси магния, напыленного на никелевую пластинку. Это дает основания предполагать, что эффект можно получить с пленки любого диэлектрика, независимо от способа ее изготовления. Нужно только принять меры для уничтожения проводимости (прокаливание поверхности в вакууме).

Характерной особенностью молтер-тока является его нестационарность. При постоянных внешних условиях величина тока непрерывно меняется. Эти изменения можно грубо разделить на два рода: первые — это непрерывные колебания около некоторого среднего значения; вторые носят характер внезапных резких отклонений в обе стороны от этого среднего, причем величина этих отклонений может превосходить среднее значение тока на 100% и более. У слюды, имеющей более ровную поверхность, эти отклонения значительно меньше, чем у порошка окиси магния, что дает основание связать нестационарность тока с неровностью поверхности. Положительный потенциал на неровной поверхности не распределен непрерывно, а сосредоточен в ряде отдельных центров, вблизи которых и происходит вырывание. Число и величина этих центров меняются, повидимому, с временем, а следовательно меняется и ток.

В силу нестационарности тока наши измерения носят статистический характер.

ВРЕМЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МОЛТЕР-ТОКА

Основным фактором, определяющим продолжительность сохранения потенциала поверхности (а следовательно и тока) после прекращения бомбардировки, является степень уничтожения поверхностной проводимости. У слюды с хорошо обезгаженной поверхностью величина тока спадает за 30 мин. на 2—3%. У слюды, поверхность которой была недостаточно хорошо обезгажена, спадение идет быстрее (рис. 2). У магнезии подобные кривые получить не удалось. Ток, незначительно спадая в течение некоторого времени (которое доходило до 4—5 часов), внезапно, в силу, повидимому, каких-то побочных причин, прекращается.

ЗАВИСИМОСТЬ ТОКА ОТ ПОТЕНЦИАЛА КОЛЛЕКТОРА

Кривые зависимости тока от потенциала коллектора изображены на рис. 3. Кривая (*1*) снята для слюды без бомбардировки, остальные — для магнезии под бомбардировкой. Средняя величина тока при включенной бомбардировке та же, что и при выключенной, но характер тока более стационарный, так как бомбардировка, повидимому, поддерживает число центров более или менее постоянным (правда, и при этом полной стационарности нет). Было проверено, что гальванометр и при включенной бомбардировке регистрирует чистый молтер-ток, т. е. на ток бомбардировки не реагирует.

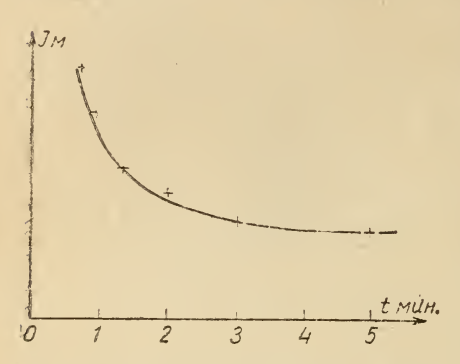


Рис. 2. Спадение молтер-тока с временем для слюды.

Во время бомбардировки на поверхности образуется потенциал, примерно равный потенциалу коллектора, так как коэффициент вторичной эмиссии может быть больше единицы (и, следовательно, потенциал поверхности повышается) лишь в том случае, если между поверхностью мишени и коллектором не приложено задерживающее поле. Естественно, что при повышении потенциала коллектора повышается и потенциал поверхности мишени. Таким образом, те зависимости на рис. 3, которые сняты под бомбардировкой, вполне ясны.

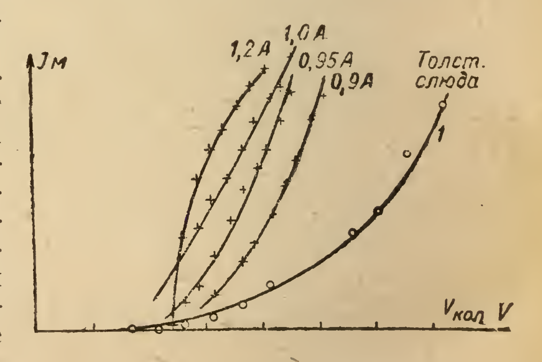


Рис. 3. Зависимость молтер-тока от градиента.

Но для того, чтобы объяснить, почему ток возрастает с возрастанием потенциала коллектора при выключенной бомбардировке, необходимо предположить, что хотя бы часть электронов вылетает из диэлектрика, тем самым повышая его потенциал. В этом случае мы уже не можем утверждать, что потенциал диэлектрика не может стать больше, чем потенциал коллектора, так как электроны, летящие из более глубоких слоев, могут иметь скорости, достаточные для того, чтобы преодолеть неслишком сильное задерживающее поле. Ясно лишь то, что потенциал диэлектрика не может возрастать до сколь угодно большой величины, так как в этом случае между поверхностью и коллектором создается столь сильное задерживающее поле, что подавляющее

большинство электронов будет возвращаться на поверхность, тем самым понижая ее потенциал. Но так как молтер-ток может итти в течение весьма продолжительного времени, то нужно предположить, что часть электронов, вылетевших из диэлектрика, замещается электронами из заземленной металлической подкладки. (Этот процесс можно себе представить следующим образом: на место вылетевшего электрона попадает электрон из более глубокого слоя; тот в свою очередь замещается еще более глубоким электроном и т. д., пока процесс не дойдет до металла). То, что металл действительно теряет электроны, подтверждается показаниями гальванометра, соединенного с подкладкой; то, что электронов, летящих непосредственно из подкладки, ничтожное количество, подтверждается распределением скоростей (см. далее).

Таким образом, идут, очевидно, два процесса: 1) вылетание электронов без замещения электронами металла, в результате чего повышается потенциал поверхности, и 2) вылетание электронов, замещающихся электронами из металла. Первый процесс, понятно, может итти до тех пор, пока вызванное им повышение потенциала пленки не станет столь значительным, что дальнейшему вылетанию электронов будет препятствовать сильное задерживающее поле.[1] Далее наступает некоторое стационарное состояние, определяемое потенциалом коллектора, при котором первый процесс итти не может. Второй процесс может происходить при любых условиях, так как он не вызывает повышения потенциала.

Итак, факт возрастания тока с повышением потенциала коллектора может быть объяснен, так как изменение потенциала коллектора вызывает изменение потенциала диэлектрика, поскольку последний определяется потенциалом коллектора.

Предположение о существовании процесса первого рода необходимо также и для объяснения следующего факта. Если понизить потенциал коллектора до нуля, а затем, по прошествии некоторого времени, снова включить, то молтер-ток без дополнительной бомбардировки „самооживляется“, достигая прежних значений. Очевидно, при выключенном потенциале коллектора часть центров остается, и если затем снова включить потенциал, то начинается процесс вырывания электронов без замещения, в результате которого потенциал пленки поднимается до величины, соответствующей потенциалу коллектора. Если подвергнуть поверхность бомбардировке при выключенном потенциале коллектора, т. е. при условиях, в которых коэффициент вторичной эмиссии меньше единицы, то центры ликвидируются и самооживления не наблюдается.

---

[1] В некоторых случаях, правда, потенциал возрастает до весьма большого значения и ток становится настолько большим, что, если не ограничить гальванометра последовательно включенным сопротивлением, гальванометр перегорает. Но эти случаи редки, а сопротивление в цепи гальванометра позволяет их и вовсе устранить.

ЗАВИСИМОСТЬ МОЛТЕР-ТОКА ОТ ТОКА БОМБАРДИРОВКИ

У тщательно обезгаженной пленки зависимости молтер-тока от тока бомбардировки не обнаружено. Для пленки магнезии, проводимость которой заметно сказывалась (время существования тока после бомбардировки очень мало), получены кривые, изображенные на рис. 4 (по оси абсцисс отложена величина накала нити электронной пушки). Вследствие существования проводимости потенциал поверхности меньше того, который имел бы место при идеальных условиях. Если теперь увеличивать ток бомбардировки, то повышением потенциала за счет вторичной эмиссии можно компенсировать его уменьшение за счет проводимости. Следовательно, при постепенном увеличении тока бомбардировки влияние проводимости будет все меньше и меньше сказываться и кривая будет иметь „насыщение“, соответствующее полной компенсации проводимости. Это насыщение видно на кривых, рис. 5.

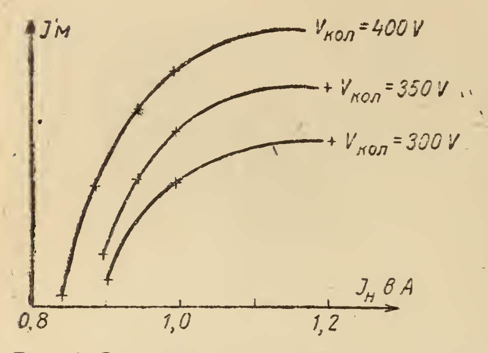


Рис. 4. Зависимость молтер-тока от тока бомбардировки.

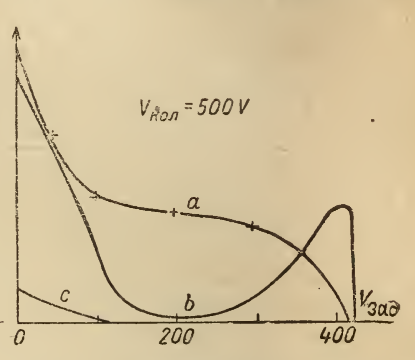


Рис. 5. Распределение скоростей при больших интенсивностях тока.

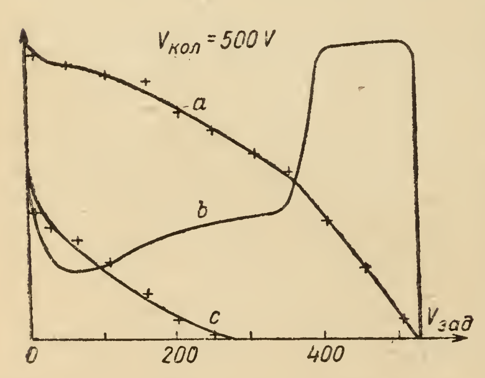


Рис. 6. Распределение скоростей при малых интенсивностях тока.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛТЕР-ЭЛЕКТРОНОВ

Распределение скоростей исследовалось методом задерживающего поля. Электроны, пролетая через отверстие в боковой стенке коллектора *3* (см. рис. 1), попадают в фарадеев цилиндр *7*. На своем пути они пролетают через сетку *6*, на которую можно подавать любой потенциал.

Распределение скоростей зависит от интенсивности тока. При больших интенсивностях получаются кривые, изображенные на рис. 5, при малых — кривые рис. 6. Кривая *a* — вольтамперная характеристика; *b* — кривая распределения скоростей; *c* — интенсивность тока чистой вторичной эмиссии, попадающего на фарадеев цилиндр.

При больших интенсивностях тока бросается в глаза тот факт, что большинство электронов имеет малые скорости. Электронов со скоростями, которыми они должны были бы обладать при прохождении всего поля между подкладкой и поверхностью, ничтожное число. Это позволяет заключить, что подавляющее число электронов вылетает из диэлектрика и притом, главным образом, из близлежащих к поверхности слоев.

Возможна здесь и другая точка зрения: все электроны вылетают из металла, но теряют часть своей энергии при прохождении через диэлектрик. Но эта точка зрения отвергается результатами исследования углового распределения электронов. Мишень 4 можно было поворачивать, меняя угол между нормалью к ней и осью фарадеева цилиндра. Величина тока в различных направлениях изображена в полярных координатах на рис. 7. Видно, что подавляющее большинство электронов вылетает нормально к поверхности. Потеря же энергии на столкновения непременно была бы связана с рассеиванием электронов.

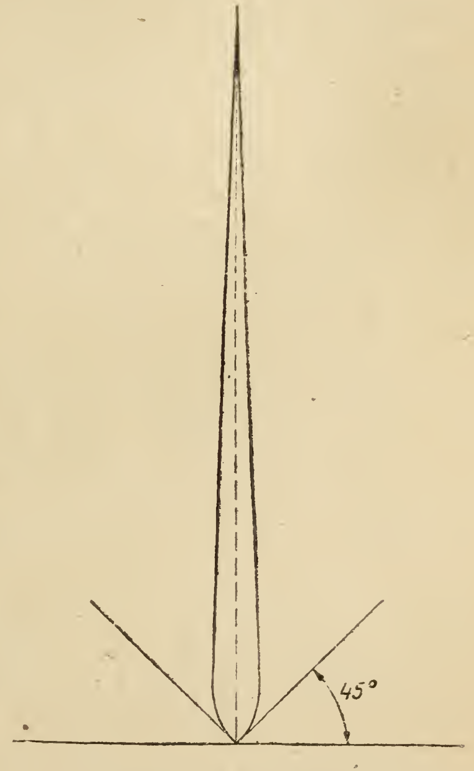


Рис. 7. Угловое распределение тока.

При малых интенсивностях тока картина существенно изменяется. Здесь уже электронов полных скоростей достаточно большое число (рис. 6), и, повидимому, в этом случае большинство электронов летит из подкладки.

Исследование этого вопроса еще не закончено, и причины изменения характера распределения скоростей, о котором идет речь, еще не выяснены.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ НЕЙТРОНОВ МОЛЕКУЛАМИ ВОДОРОДА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ВЫСОКИХ КВАНТОВЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ УРОВНЕЙ

Н. А. Бургов

1. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Исследуя рассеяние нейтронов молекулами водорода, Schwinger and Teller [1] получили следующие формулы для поперечника рассеяния

$$\sigma_{j', v', s', j, v, s}(\theta) = \frac{4p}{9p_0}\left[(3a_1 + a_0)^2 + S(S+1)(a_1 - a_0)^2\right] \times$$

$$\times \frac{1}{2j+1} \sum_{m_j, m_j'} \left| \int \cos\left(\frac{\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}}{2\hbar}\boldsymbol{r}\right) \psi^*_{j', v', m'_j} \psi_{j, v, m_j} d\tau \right|^2; \qquad (1)$$

$$\sigma_{j', v', s', j, v, s}(\theta) = \frac{4p}{9p_0}(a_1 - a_0)^2 (3 - 2S) \times$$

$$\times \frac{1}{2j+1} \sum_{m_j m_j'} \left| \int \sin\left(\frac{\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}}{2\hbar}\tau\right) \psi_{j'v's'} \psi_{j, v, s}\, d\tau \right|^2. \qquad (2)$$

Формула (1) относится к случаю, когда общий спин молекулы после столкновения равен спину молекулы до столкновения. Формула (2) относится к случаю, когда спин переворачивается, т. е. молекула из ортоводородного состояния переходит в пароводородное, и наоборот.

Обозначения в этих формулах:

v — колебательное кв. число до столкновения;
v' — „ „ „ после столкновения;
j — вращательное „ „ до столкновения;
j' — „ „ „ после столкновения;
m_j' — магнитное „ „ после столкновения;
m_j — „ „ „ до столкновения;
S и S' — спиновые числа до и после столкновения;
$\boldsymbol{p}_0$ — импульс нейтрона до столкновения в инерциальной координатной системе, т. е. в системе, в которой покоится центр инерции системы;
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ — направлен по оси молекулы;
$\boldsymbol{p}$ — импульс нейтрона после столкновения в этой же системе;

a_0 и a_1 — величины, имеющие размерность длины, определяющие поперечник рассеяния нейтронов свободными протонами.

Именно полный поперечник (проинтегрированный по всем углам θ) рассеяния нейтронов протонами, будет (при нулевой энергии нейтронов)

$$\sigma_{\text{singlet}} = 4\pi a_0^2; \quad \sigma_{\text{triplet}} = 4\pi a_1^2$$

σ_{singlet} — отвечает сингулетному состоянию системы протон — нейтрон;
σ_{triplet} — отвечает триплетному состоянию этой системы;
ψ — волновая функция молекулы водорода.

Эти формулы Schwinger and Teller вывели, исходя из допущения, что взаимодействие между нейтроном и протоном можно, по Ферми, представить в виде

$$-\left(\frac{4\pi\hbar^2}{M}\right)\left[\frac{1}{2}a_1(1+Q)+\frac{1}{2}a_0(1-Q)\right]\delta(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_p), \tag{3}$$

где $Q=\frac{1+\sigma_p\sigma_n}{2}$.

Собственные значения оператора $Q=\pm 1$. Собственному значению $Q=1$ отвечает симметричная волновая функция и триплетное состояние системы протон — нейтрон. Собственному значению $Q=-1$ отвечает сингулетное состояние.

После этого применяется метод Борна и получаются формулы (1) и (2).

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ σ

1. Суммы, входящие в (1) и (2), должны быть инвариантны относительно выбора преимущественного направления. Наиболее удобно выбрать преимущественное направление по вектору $\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}$. Тогда

$$\frac{\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}}{2\hbar}\boldsymbol{r}=\frac{|\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}|}{2\hbar}r\cos\vartheta,$$

где ϑ — угол между $\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{r}$.

Как известно, волновая функция молекулы водорода может быть написана в форме

$$\psi_{v,j,m_j}=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^v v!}}e^{-\frac{M^*\omega}{\hbar}(r-r_0)^2}\times\frac{H_v\left[\sqrt{\frac{M^*\omega}{\hbar}}(r-r_0)\right]}{r}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}\cdot P_j^{m_j}(\cos\vartheta)\cdot e^{im_j\varphi}. \tag{4}$$

Здесь, как обычно,

M^* — приведенная масса $=\frac{M}{2}$;
ω — частота;

M — масса протона;

r_0 — расстояние между протонами в положении равновесия.

В первом приближении можно считать молекулу твердым ротатором и соответственно волновую функцию молекулы заменить следующей

$$\psi_{j,v,m_j} = \frac{[\delta(r-r_0)]^{\frac{1}{2}}}{r}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}\cdot P_j^{m_j}(\cos\vartheta)\cdot e^{im_j\varphi}. \qquad (5)$$

Очевидно, что условие применимости этого результата таково: половинная ширина Гауссовой кривой, входящей в колебательную часть, должна быть меньше полупериода синуса или косинуса, входящего под знак интеграла, т. е.

$$\sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} < \frac{2\pi\hbar}{|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}|} \qquad (6)$$

или

$$\frac{p_0^2 + p^2 - 2pp_0\cos\theta}{2M} < \hbar\omega. \qquad (6a)$$

Очевидно, что вблизи этого значения $|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}|$ все же дельтообразная волновая функция будет давать приближение к действительной и не сможет существенно исказить результат.

Мы будем вычислять поперечник рассеяния, считая, что молекулы водорода находятся в своем основном состоянии, т. е. не возбуждены ни вращательные, ни колебательные уровни. Это справедливо до температур порядка 100° K (см. [2]). Мы предполагаем, что в результате удара нейтрона возбуждаются высокие вращательные уровни, но не возбуждаются колебательные. Это налагает ограничение на энергию рассматриваемых нейтронов. Максимальная энергия нейтронов, рассеяние которых будет происходить по формулам, выведенным здесь, равно, по порядку величины, энергии первого колебательного уровня

$$\frac{p_0^2}{2M} \approx \hbar\omega,$$

где ω — частота колебаний в молекуле водорода.

Тогда с этими предположениями имеют место следующие ограничения для квантовых чисел:

1. $m_j = m_j' = 0$ для пароводорода, и $m_j = 0{,}1$, $m_j' = 0{,}1$ для ортоводорода. Будет иметь место правило отбора $m_j' = m_j$.

2. $j = 0$ — для пароводорода и $j = 1$ для ортоводорода.

2. Вычислим σ для пароводорода. По формулам (1) и (2) мы будем иметь:

а) Спин не переворачивается:

$$\sigma_{j,0,0,0,0,0}(\theta) = \frac{4p}{9p_0}(3a_1 + a_0)^2\frac{2j+1}{(4\pi)^2}\times$$
$$\times\left|\int\cos\left(\frac{\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}}{2\hbar}\boldsymbol{r}_0\right)\cdot P_j(\cos\theta)\,2\pi\sin\theta d\theta\right|^2. \qquad (7)$$

Здесь

$$P_j(\cos\theta) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d}{d(\cos\theta)}(-\sin\theta)^j.$$

Интегрирования по r и по φ уже произведены. Так как $P_j(\cos\theta)$ четная функция $\cos\theta$ при четных j и нечетная — при нечетных j, то при j четном интеграл отличен от нуля, а при j нечетном — равен нулю, как и следовало ожидать.

б) Спин переворачивается:

$$\sigma_{j,0,1,0,0,0,}(\theta)=\frac{4p}{9p_0}\,3\,(a_1-a_0)^2\cdot\frac{2j+1}{(4\pi)^2}\times$$
$$\times\left|\int\sin\left(\frac{\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}}{2\hbar}\boldsymbol{r}_0\right)\cdot P_j(\cos\theta)\,2\pi\sin\theta\,d\theta\right|^2. \qquad (8)$$

Очевидно, этот интеграл отличен от нуля при нечетных j и равен нулю при четных.

Для вычисления входящих в поперечник рассеяния интегралов рассмотрим

$$\int_{-1}^{+1}e^{iAr_0t}P_j(t)\,dt=\int_0^\pi\cos(Ar_0\cos\theta)\,P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta+]$$
$$+i\int_0^\pi\sin(Ar_0\cos\theta)\,P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta). \qquad (9)$$

Вещественная часть равна нулю при нечетных j, мнимая же часть равна нулю при четных j.

Величина $A=\frac{|\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{p}|}{2\hbar}$.

Известно следующее разложение функции $e^{iAr_0\cos\theta}$ (см. [3])

$$e^{iAr_0\cos\theta}=\sum_{j=0}^{\infty}B_jP_j(\cos\theta)\,f_j(r), \qquad (10)$$

где

$$B_j=(2j+1)\,(i)^j,\quad f_j(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2Ar}}\,I_{j+\frac{1}{2}}(Ar).$$

Умножая на $P_j(\cos\theta)$ и интегрируя по $\cos\theta=t$ от -1 до $+1$, получим

$$\int_{-1}^{+1}e^{iArt}P_j(t)\,dt=B_jf_j(r)\int_0^\pi P_j^2(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2j+1}B_jf_j(r). \qquad (11)$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{+1}e^{iArt}P_j(t)\,dt=\sqrt{\frac{2\pi}{Ar}}\,(i)^j\,I_{j+\frac{1}{2}}(Ar). \qquad (12)$$

Здесь $I_{j+\frac{1}{2}}$ — Бесселева функция порядка $j+\frac{1}{2}$.

При больших j представляет интерес вычислить этот интеграл приближенно, пользуясь „методом перевала“. Таким образом

можно получить сразу некоторые суждения о характере рассеяния.

При больших j мы можем получить приближенное выражение для волновой функции вращения, пользуясь методом, аналогичным методу Венцеля-Крамерса-Бриллюэна, а именно — найдя решение волнового уравнения

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+j(j+1)Y=0 \tag{13}$$

в форме

$$Y=e^{ijy(\vartheta,\varphi)}.$$

Здесь Y — функция, подлежащая определению.

Если рассматривать решения, зависящие только от ϑ, но не от φ, то волновое уравнение будет следующим

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)+j(j+1)Y=0 \tag{14}$$

и его приближенное решение будет

$$Y\approx\frac{C}{\sqrt{\sin\vartheta}}e^{i\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\vartheta-\frac{\pi}{4}\right]}. \tag{15}$$

Так как при малых j это решение должно перейти в полином Лежандра порядка j, то можно показать (см. [4]), что множитель C должен быть выбран равным $\frac{1}{\sqrt{\pi j}}$.

Таким образом вместо $P_j(t)$ в интеграл (9) мы подставим

$$P_j(t)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi j}}\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}e^{i\left[(2j+1)\frac{\vartheta}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}; \tag{16}$$
$$\cos\vartheta=t.$$

Тогда интеграл (9) будет иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi j}}\int_{-1}^{+1}e^{i\left[Ar_0t+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos t-\frac{\pi}{4}\right]}\frac{dt}{\sqrt[4]{1-t^2}}. \tag{17}$$

Этот интеграл может быть вычислен методом перевала, используя тот факт, что $e^{if(t)}$ — вообще быстро осциллирующая функция, исключая те точки, где $f(t)$ имеет максимум. $f(t)$ — разлагается в ряд Тейлора около точки своего максимума и из ряда удерживаются только два члена.

Легко показать, что максимум $f(t)$ в нашем случае достигается при

$$t=\pm\sqrt{1-\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2}{(Ar_0)^2}} \tag{18}$$

Введем сокращение

$$\sqrt{1-\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2}{(Ar_0)^2}}=a.$$

Тогда в максимуме

$$t = \pm a.$$

Величина $\frac{1}{\sqrt[4]{1-t^2}}$ представляет медленно меняющуюся функцию, и поэтому она может быть вынесена за знак интеграла (17).

Для того, чтобы максимум $f(t)$ лежал в промежутке интегрирования, необходимо, чтобы $a < 1$, т. е.

$$\frac{j+\frac{1}{2}}{Ar_0} < 1.$$

В остальных случаях максимум находится вне промежутка и

$$\int \cong 0.$$

Учтя, что

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= Ar_0 a + \left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a - \frac{\pi}{4} \\ f''(a) &= -\frac{a\,(Ar_0)^3}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

получим, что интеграл (17) равен приблизительно

$$\sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}}{j}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a\,(Ar_0)^2}}\,(i)^j \sin\left[Ar_0 a + \left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a - \frac{\pi j}{2}\right]. \tag{20}$$

Таким образом мы получим, что (17) равен приблизительно (20), когда $\left(j+\frac{1}{2}\right) < Ar_0$, и равен приблизительно 0, когда

$$\left(j+\frac{1}{2}\right) > Ar_0.$$

В [5] дается ассимптотическое разложение Бесселевой функции полуцелого порядка при высоких порядках и больших значениях аргумента.

$$I_{j+\frac{1}{2}}(z) \approx \sqrt{\frac{R}{2\pi z}}\sin\Phi,$$

где

$$R = \frac{z}{\sqrt{z^2 - \left(j+\frac{1}{2}\right)^2}} \quad \text{и} \quad \Phi = \sqrt{z^2 - \left(j+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{j\pi}{2} +$$

$$+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arcsin\frac{j+\frac{1}{2}}{z}. \tag{21}$$

Если мы введем наши обозначения Ar_0 и a, то получим

$$\sqrt{\frac{2\pi}{Ar_0}}\,(i)^j I_{j+\frac{1}{2}}(Ar_0) \approx \sqrt{\frac{1}{a\,(Ar_0)^2}}\,(i)^j \times$$

$$\times \sin\left[Ar_0 a + \left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a - \frac{j\pi}{2}\right], \tag{22}$$

результат, совпадающий с (20) с точностью множителя $\sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}}{j}}$.

В [5], однако, получено это разложение иным путем. Это разложение, данное [5], справедливо при

$$z > j + \frac{1}{2} \gg 1, \tag{23}$$

а именно при

$$\sqrt{z^2 - \left(j+\frac{1}{2}\right)^2} > z^{\frac{1}{3}} \gg 1.$$

После того как вычислен интеграл (9), легко написать поперечник рассеяния.

Согласно (7)

$$\sigma_{j,0,0,0,0,0}(\theta) = \frac{4p}{9p_0}(3a_1 + a_0)^2 \cdot \frac{2j+1}{4}\frac{2\pi}{Ar_0} I^2_{j+\frac{1}{2}}(Ar_0) \tag{24}$$

при j — четных и не переворачивающемся спине и

$$\sigma_{j,0,1,0,0,0}(\theta) = \frac{4p}{9p_0} 3(a_1 - a_0)^2 \frac{2j+1}{4} \cdot \frac{2\pi}{Ar_0} I^2_{j+\frac{1}{2}}(Ar_0) \tag{24a}$$

при j нечетном и переворачивающемся спине.

Подставляя вместо

$$\sqrt{\frac{2\pi}{Ar_0}} I_{j+\frac{1}{2}}(Ar_0)(i)^j$$

(22), получим ассимптотически, с точностью до $\frac{1}{j}$:

$$\sigma_{j,0,0,0,0,0}(\theta) \approx \frac{4p}{9p_0}(3a_1 + a_0)^2 \cdot \frac{2j+1}{4} \cdot \frac{1}{a(Ar_0)^2} \times$$
$$\times \sin^2\left[Ar_0 a + \left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a - \frac{j\pi}{2}\right] \tag{25}$$

и

$$\sigma_{j,0,1,0,0,0}(\theta) \approx \frac{4p}{9p_0} 3(a_1 - a_0)^2 \cdot \frac{2j+1}{4} \cdot \frac{1}{a(Ar_0)^2} \times$$
$$\times \sin^2\left[Ar_0 a + \left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a - \frac{j\pi}{2}\right]. \tag{25a}$$

3. При вычислении интеграла методом перевала мы получили, что максимум показателя находится в промежутке интегрирования лишь тогда, когда

$$a = \sqrt{1 - \left(\frac{j+\frac{1}{2}}{Ar_0}\right)^2} < 1.$$

Это означает, что

$$Ar_0 > j + \frac{1}{2}.$$

Но

$$Ar_0 = \frac{|p_0 - p|}{2\hbar} r_0.$$

При изменении угла рассеивания от 0 до π Ar_0 изменяется от $\frac{p_0 - p}{2\hbar} r_0$ до $\frac{p_0 + p}{2\hbar} r_0$ и, следовательно, оно максимально при $\theta = \pi$.

Выведем связь между p_0 и p. В инерциальной системе импульсы молекулы и нейтрона равны, и, следовательно, по закону сохранения

$$E = \frac{p_0^2}{2M} + \frac{p_0^2}{4M} + E_{j,v} = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{4M} + E_{j'v'}, \tag{26}$$

или

$$\frac{3}{4} \frac{p_0^2}{M} + E_{j,v} = \frac{3}{4} \frac{p^2}{M} + E_{j'v'}, \tag{26a}$$

или

$$p_0^2 - p^2 = \frac{4M}{3} \Delta E. \tag{26b}$$

В случае параводорода

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{2M^* r_0^2} \tag{27}$$

M^* — приведенная масса, т. е.

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 j(j+1)}{M r_0^2};$$

таким образом,

$$p_0^2 - p^2 = \frac{1}{3} \frac{4\hbar^2 j(j+1)}{r_0^2}, \tag{28}$$

или

$$\frac{p_0 - p}{2\hbar} \cdot \frac{p_0 + p}{2\hbar} = \frac{1}{3} j(j+1) \approx \frac{1}{3} \left(j + \frac{1}{2}\right)^2;$$

отсюда видно, что

1) при $p = 0$

$$Ar_0 = \frac{p_0 r_0}{2\hbar} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(j + \frac{1}{2}\right)$$

и заметного рассеяния нет;

2) нет никогда заметного рассеяния на угол 0, так как если

$$\frac{p_0 + p}{2\hbar} r_0 > j + \frac{1}{2},$$

то

$$\frac{p_0 - p}{2\hbar} < j + \frac{1}{2}.$$

Обозначим

$$p_0'^2 = \frac{4M}{3} \Delta E = \frac{1}{3} \frac{4\hbar^2}{r_0^2} \left(j + \frac{1}{2}\right)^2;$$

тогда

$$p=\sqrt{p_0{}^2-p_0'^2};$$

$$\frac{p_0'r_0}{2\hbar}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(j+\frac{1}{2}\right). \tag{29}$$

Найдем то значение импульса, при котором максимум показателя начинает входить в промежуток интегрирования. Обозначим его p_0''.

Тогда

$$\frac{p_0''+p''}{2\hbar}r_0=j+\frac{1}{2}; \tag{30}$$

из (28) следует

$$\frac{p_0''-p''}{2\hbar}r_0=\frac{1}{3}\left(j+\frac{1}{2}\right). \tag{31}$$

Решая (30) и (31), получим

$$\frac{p_0''r_0}{2\hbar}=\frac{4}{3}\left(j+\frac{1}{2}\right) \tag{32}$$

и

$$\frac{p_0''}{p_0'}=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1{,}2. \tag{32a}$$

Итак, возбуждение j того вращательного уровня начнется в заметных размерах, когда импульс падающего нейтрона будет в 1,2 раза больше, чем минимальный импульс, требующийся для возбуждения этого уровня по закону сохранения энергии и количества движения.

4. Вычислим интегральный (полный) поперечник рассеивания.

а) Спин не переворачивается.

На основании (25)

$$\sigma_{j,0,0,0,0,0}(p_0)=\frac{4p}{9p_0}(3a_1+a_0)^2\cdot\frac{2j+1}{4}\times$$

$$\times\int_0^\pi\frac{1}{a\,(Ar_0)^2}\sin^2\left[Ar_0a+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a-\frac{j\pi}{2}\right]2\pi\sin\theta\,d\theta. \tag{33}$$

Но

$$\int_0^\pi\frac{1}{a\,(Ar_0)^2}\sin^2\left[Ar_0a+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a-\frac{j\pi}{2}\right]2\pi\sin\theta d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{1}{a\,(Ar_0)^2}\left\{1-\cos 2\left[Ar_0a+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a-\frac{j\pi}{2}\right]\right\}2\pi\sin\theta\,d\theta.$$

Произведем замену переменных

$$\left.\begin{aligned}&Ar_0a=\left(j+\frac{1}{2}\right)v\\ &\text{и}\\ &(Ar_0)^2-\left(j+\frac{1}{2}\right)^2=\left(j+\frac{1}{2}\right)^2v^2\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_0 p r_0^2}{4\hbar^2}\cdot\sin\theta\, d\theta &= \left(j+\frac{1}{2}\right)^2 v\,dv \\ (Ar_0)^2 &= \left(j+\frac{1}{2}\right)^2 (v^2+1); \\ a &= \frac{v}{\sqrt{v^2+1}} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Тогда интеграл преобразуется в следующий:

$$\frac{1}{2}\,\frac{4\hbar^2}{p\,p_0\,r_0^2}\int\limits_0^C \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}\left\{1-\cos\left[(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v)-\frac{j\pi}{2}\right]\right\};$$

$$C=\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\right]^2-1}. \tag{35}$$

Интегрирование начато с 0, так как было выяснено, что рассеивание начинается лишь при $a=0$.
Первый член в (35) может быть взят

$$\int\limits_0^C \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\ln\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\right]^2-1}\right]. \tag{36}$$

Для вычисления второй части интеграла можно применить „метод перевала". Рассмотрим

$$\int e^{i(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v)}\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}; \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} &f(v)=(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v); \\ &f'(v)=(2j+1)\left(1-\frac{1}{1+v^2}\right); \qquad f'(v)=0 \ \text{при}\ v=0 \\ &f''(0)=0; \\ &f'''(0)=2(2j+1). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Тогда

$$\int\limits_0^x e^{i(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v)}\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}\approx e^{i(2j+1)\frac{\pi}{2}}\cdot\int\limits_0^x e^{i\frac{2j+1}{3}v^3}\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}. \tag{39}$$

Но

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^3}dx=\frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha}}; \tag{40}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{i\frac{2j+1}{3}v^3}dv=\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\,(i)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right). \tag{41}$$

$$\int_0^x \cos\left[(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v)\right]\cdot\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}\approx$$

$$\approx(-1)^{j+1}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}. \tag{42}$$

Тогда

$$\int_0^\pi \frac{1}{a(Ar_0)^2}\sin^2\left\{Ar_0a+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a-\frac{j\pi}{2}\right\}\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4\hbar^2}{pp_0r_0^2}\left\{\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{2\hbar\left(j+\frac{1}{2}\right)}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\right\}. \tag{43}$$

Такое выражение для второго члена справедливо, когда по крайней мере

$$\frac{(p_0+p)r_0}{2\hbar\left(j+\frac{1}{2}\right)}>\sqrt[3]{\frac{2\pi}{2j+1}},$$

т. е. когда промежуток интегрирования по крайней мере больше периода подинтегральной функции.

Таким образом:

$$\frac{(p_0+p)^3r_0^3}{8\hbar^3(2j+1)^3}>\frac{6\pi}{2j+1},$$

т. е.

$$(2j+1)>6\pi. \tag{44}$$

Если условие (44) не удовлетворяется, т. е.

$$(2j+1)<6\pi,$$

то, очевидно, тогда можно считать (приближенно) $e^{i(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v)}$ постоянным, равным его значению при $v=0$, т. е. в (35) можно подставить нуль в аргумент косинуса вместо v. Но тогда второй член (35) пропадет вовсе и, следовательно, не оказывает влияния на рассеивание.

Мы будем проводить вычисления, предполагая, что (44) выполнено. Тогда, собирая формулы (43), (35), (33), получим

$$\sigma_{j,0,0,0,0,0}(p_0)=\frac{4p}{9p_0}(3a_1+a_0)^2\frac{2j+1}{4}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\frac{4\hbar^2}{pp_0r_0^2}\cdot 2\pi\left\{\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\right\}. \tag{45}$$

б) Вычисления в случае, когда спин переворачивается, совершенно аналогичны

$$\sigma_{j,0,1,0,0,0}(p_0)=\frac{4p}{9p_0}3(a_1-a_0)^2\frac{2j+1}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{4\hbar^2}{pp_0r_0^2}\times$$
$$\times 2\pi\left\{\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\right\}. \qquad (46)$$

5. Вычислим полный поперечник рассеивания для возбуждения любого квантового уровня.

Вообще

$$\sigma(p_0)=\sum_j \sigma_{j,0,0,0,0,0}(p_0). \qquad (47)$$

В виду того, что мы имеем дело с высокими квантовыми уровнями, мы можем заменить суммирование интегрированием и, следовательно,

$$\sigma(p_0)=\int_0^{j_{\max}}\sigma_j dj. \qquad (48)$$

а) Пусть сначала мы рассматриваем поперечник без переворота спина:

$$\int_0^{j_{\max}}\sigma_j dj=\frac{4\pi}{9}\left(\frac{\hbar}{r_0p_0}\right)^2(3a_1+a_0)^2\times$$
$$\times\left\{\int_0^{j_{\max}}(2j+1)\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]dj+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{3}\int_0^{j_{\max}}(2j+1)^{\frac{2}{3}}dj\right\}=\sigma_1(p_0)+\sigma_2(p_0). \qquad (49)$$

Вычислим сначала второй член $\sigma_2(p_0)$.

$$\int_0^{j_{\max}}(2j+1)^{\frac{2}{3}}dj=\frac{3}{10}\left[(2j+1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^{j_{\max}}\approx\frac{3}{10}\left(2j+1\right)_{\max}^{\frac{5}{3}}, \qquad (50)$$

так как j — велико.

Пусть $(2j+1)=t$. Найдем связь между

$$t_{\max} \quad \text{и} \quad \frac{p_0r_0}{2\hbar}.$$

По (28)

$$\frac{p_0-p_{\min}}{\hbar}r_0\times\frac{p_0+p_{\min}}{\hbar}r_0=\frac{1}{3}t_{\max}^2.$$

Кроме того,

$$\frac{p_0 + p_{\min}}{\hbar} r_0 = t_{\max}.$$

Отсюда

$$\frac{p_0 r_0}{\hbar} = \frac{2}{3} t_{\max}. \qquad (51)$$

Тогда

$$\sigma_2(p_0) = \frac{4\pi}{9}(3a_1 + a_0)^2 \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^{\frac{1}{3}}; \qquad (52)$$

$$\sigma_1(p_0) = \frac{4\pi}{9} 2(3a_1 + a_0)^2 \times$$

$$\times \int_0^{j_{\max}} (2j+1) \ln\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar} + \sqrt{\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2 - 1}\right] dj.$$

Введем переменную $\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar} = v$.

$$dj = -\frac{p_0 r_0}{j}\left[\frac{v^2 - \frac{1}{3}}{\left(v^2 + \frac{1}{3}\right)^2}\right], \quad (2j+1) = \frac{2v}{v^2 + \frac{1}{3}} \frac{p_0 r_0}{\hbar}. \qquad (53)$$

Тогда

$$\sigma_1(p_0) = \frac{4\pi}{9} 2(3a_1 + a_0)^2 \times \int_1^{\frac{(p_0+p) r_0}{\hbar}} \frac{v\left(v^2 - \frac{1}{3}\right)}{\left(v^2 + \frac{1}{3}\right)^3} \ln\left(v + \sqrt{v^2 - 1}\right) dv. \qquad (54)$$

На верхнем пределе $p \approx p_0$, так как на верхнем пределе j мало и, следовательно, верхний предел $\approx \frac{2p_0 r_0}{\hbar}$. Покажем, что в первом приближении интеграл не зависит от верхнего предела

$$\int_1^{\frac{2p_0 r_0}{\hbar}} f(v)\, dv = \int_1^{\infty} f(v)\, dv - \int_{\frac{2p_0 r_0}{\hbar}}^{\infty} f(v)\, dv. \qquad (55)$$

$f(v)$ — обозначена подинтегральная функция. Но во втором интеграле v велико, так как $\frac{2p_0 r_0}{\hbar} = \frac{4}{3}(2j+1)_{\max}$ и, следовательно, подинтегральная функция с точностью до величин второго порядка может быть упрощена

$$f(v) \approx \frac{\ln 2v}{v^3}. \qquad (56)$$

Но тогда вторая часть интеграла может быть вычислена и оказывается равной:

$$\frac{2\lg\frac{4p_0r_0}{\hbar}+1}{4\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^2}\approx\frac{1}{\left(\frac{2p_0r_0}{\hbar}\right)^2}. \tag{57}$$

Итак, поправочные члены, дающие зависимость интеграла (54) от верхнего предела порядка $\frac{\hbar^2}{4p_0^2r_0^2}\approx\frac{1}{(2j+1)^2}$ т. е. очень малы и ними можно пренебречь.

Тогда

$$\sigma_1(p_0)=\frac{4\pi}{9}2(3a_1+a_0)^2\times\int\limits_1^\infty\frac{v\left(v^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)}\ln\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)dv. \tag{58}$$

Интеграл в (58) интегрированием по частям и введением переменной $\frac{v}{v^2-1}=\frac{1}{4}u^2$ приводится к виду

$$\frac{9}{16}\int\limits_2^\infty\frac{u^2du}{(u^2-1)^2}=0{,}342. \tag{59}$$

Если сосчитать все числа в (52) и (58), то мы получим:

$$\sigma(p_0)=(3a_1+a_0)^2\left[0{,}955+0{,}531\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{60}$$

б) Аналогично, когда спин переворачивается:

$$\sigma(p_0)=3(a_1-a_0)^2\left[0{,}955+0{,}531\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

6. Вычислим величины a_0 и a_1. Согласно определению a_0 и a_1 выражаются через поперечник рассеяния нейтронов свободными протонами

$$\sigma_{\text{singlet}}=4\pi a_0^2,\quad \sigma_{\text{triplet}}=4\pi a_1^2$$

при нулевой энергии нейтронов.

В [6] — формула (62) — дана следующая формула Бете-Вигнера

$$\sigma^a=\frac{4\pi\hbar^2}{M}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon'+\frac{1}{2}E_0}+\frac{3}{4}\frac{1}{\varepsilon+\frac{1}{2}E_0}\right]; \tag{61}$$

здесь ε может быть отождествлена с энергией связи дейтрона. Вторая часть (61) отвечает σ_{triplet}, а первая — σ_{singlet}.

Величина ε' должна быть подобрана таким образом, чтобы получался правильный поперечник рассеивания. Сингулетное состояние является виртуальным, а поэтому $a_0<0$, $a_1>0$; так как триплетное состояние реально, ε' оказывается равным — 1 200 000 V.

Если мы учтем, что на основании (61)

$$a_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{M\varepsilon'}} \quad \text{и} \quad a_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{M\varepsilon}},$$

то после вычислений получим

$$3a_1 + a_0 \approx 6{,}0 \cdot 10^{-13} \text{ см};$$
$$a_1 - a_0 \approx 24{,}0 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Поэтому поперечник рассеяния с переворачиванием спина будет примерно в двадцать раз больше, чем поперечник без переворачивания.

III. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ НЕЙТРОНОВ С МОЛЕКУЛАМИ ПАРАВОДОРОДА

1. Для этого вычисления, очевидно, придется взять потери энергии в „лабораторной“ системе координат, т. е. в системе, в которой молекулы водорода до столкновения покоятся.

Пусть $\boldsymbol{v}_1^R$ — скорость нейтрона в лабораторной системе до, и $\boldsymbol{v}_1^{R'}$ — после столкновения.

$\boldsymbol{v}_c$ — скорость центра инерции в лабораторной системе; $\boldsymbol{v}_1^c$ и $\boldsymbol{v}_1^{c'}$ — скорости нейтрона до и после столкновения в инерциальной системе. По закону сложения скоростей

$$\frac{M(\boldsymbol{v}_1^R)^2}{2} = \frac{M(\boldsymbol{v}_1^c + \boldsymbol{v}_c)^2}{2} = \frac{M(\boldsymbol{v}_1^c)^2}{2} + M(\boldsymbol{v}_1^c, \ \boldsymbol{v}_c) + \frac{M\boldsymbol{v}_c^2}{2}. \tag{62}$$

Аналогичное выражение получим для скоростей после столкновения.

По закону сохранения количества движения скорость центра инерции не изменится.

Найдем потерю энергии

$$\Delta E' = \frac{M(\boldsymbol{v}_1^R)^2}{2} - \frac{M(\boldsymbol{v}_1^{R'})^2}{2} = \frac{M(\boldsymbol{v}_1^c)^2}{2} - \frac{M(\boldsymbol{v}_1^{c'})^2}{2} + M(\boldsymbol{v}_c, \ \boldsymbol{v}_1^c - \boldsymbol{v}_1^{c'}) =$$
$$= \frac{\boldsymbol{p}_0^2}{2M} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M} + (\boldsymbol{v}_c, \ \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}).$$

Но

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{\boldsymbol{v}_1^c}{2} = \frac{\boldsymbol{p}_0}{2M}. \tag{63}$$

Тогда

$$\Delta E' = \frac{p_0^2 - p^2}{2M} + \frac{p_0}{2M}(p_0 - p\cos\theta), \tag{64}$$

так как θ — угол между $\boldsymbol{p}_0$ и $\boldsymbol{p}$.

Введем следующие обозначения

$\overline{\Delta E}$ — потеря энергии, усредненная как по углам, так и по возбужденным квантовым уровням;

$\overline{\Delta E_j}$ — потеря энергии, усредненная только по углам;

$\Delta E'$ — величина, введенная в (64);
ΔE — разность термов начального и возбужденного состояния

$$\Delta E = E_{j'\, v'} - E_{j,\, v}.$$

На основании (64) можно будет написать

$$\Delta E' = \frac{2}{3}\Delta E + \frac{p_0}{2M}(p_0 - p\cos\theta);$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2}\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4Mr_0^2}(2j+1)^2. \tag{65}$$

2. Очевидно

$$\overline{\Delta E} = \frac{\int\limits_0^{j_{\max}} dj \int\limits_0^{\pi} \Delta E' \sigma_j(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta}{\int\limits_0^{j_{\max}} dj \int\limits_0^{\pi} \sigma_j(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta}. \tag{66}$$

Вычислим

$$\int\limits_0^{\pi} \Delta E' \sigma_j(\theta)\, 2\pi\sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\Delta E \sigma_j + \int\limits_0^{\pi} \frac{p_0}{2M}(p_0 - p\cos\theta)\sigma_j(\theta)\, 2\pi\sin\theta\, d\theta. \tag{67}$$

Произведем замену переменных, уже сделанную нами при вычислении σ полного $Ar_0 a = \left(j + \frac{1}{2}\right)v$;

$$\frac{p_0^2 + p^2 - 2pp_0\cos\theta}{4\hbar^2} r_0^2 = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 (v^2+1);$$

$$\frac{p_0}{2M}(p_0 - p\cos\theta) = \frac{1}{3}\Delta E + \frac{\hbar^2}{4Mr_0^2}(2j+1)^2(v^2+1). \tag{68}$$

Тогда (67) можно будет написать в следующем виде

$$\Delta E\, \sigma_j(p_0) + \Delta E \int\limits_0^{n} \sigma_j(\theta)(v^2+1)\, 2\pi\sin\theta\, d\theta. \tag{69}$$

Рассмотрим отдельно второе слагаемое (69). В развернутом виде его можно написать

$$\Delta E(2j+1)\frac{4\pi}{9}(3a_1 + a_0)^2\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2 \times$$

$$\times \int\limits_0^{C} \sqrt{v^2+1}\, dv \times \{1 - \cos[2j+1)(v + \operatorname{arc\,ctg} v) - j\pi]\} \tag{70}$$

Первая часть может быть взята. Рассмотрим второе слагаемое:

$$-\int\limits_0^{C} \sqrt{v^2+1}\, dv \cos[(2j+1)(v + \operatorname{arc\,ctg} v)] - j\pi]. \tag{71}$$

Этот интеграл, очевидно, не стремится ни к какому пределу при стремлении верхнего предела к ∞, так как при больших v arc ctg $v \to 0$ и остается

$$\int_0^R v\,dv \cos(2j+1)v. \tag{72}$$

При увеличении v величина отклонений этого интеграла от его средней величины, вычисляемой методом перевала, будет возрастать. Наибольшие отклонения возникнут, когда: 1) v — велико, 2) верхний предел велик, т. е. $\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar} \gg 1$.

Максимальная величина ошибки при вычислении интеграла, очевидно, не превышает величины интеграла между двумя нулями функции $\cos(2j+1)v$ при больших v. Оценим эту величину. При больших v рассматриваемый интеграл с точностью до величин второго порядка выражается по формуле (72). Нули подинтегральной функции даются условием

$$(2j+1)v = \frac{(2k+1)\pi}{2}; \tag{73}$$

v в основном интеграле (71) изменяется от 0 до C. Если условие (73) выполнено, то наибольшую ошибку получим, когда v порядка $\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}$, т. е.

$$\frac{2k+1}{2j+1}\cdot\frac{\pi}{2} \approx \frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}. \tag{74}$$

Пределы в (72) нужно определить так:

$$\int\limits_{\frac{2k-1}{2j+1}\frac{\pi}{2}}^{\frac{2k+1}{2j+1}\frac{\pi}{2}} v\cos(2j+1)v\,dv, \tag{75}$$

где

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{(p+p_0)r_0}{\hbar}.$$

Произведем замену переменных $(2j+1)v = t$.
Интеграл (75) тогда равен

$$\frac{1}{(2j+1)^2}\int\limits_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} v\cos v\,dv \approx \frac{2(p_0+p)r_0}{\hbar(2j+1)^2}.$$

Так как в дальнейшем производится интегрирование по j, то в результате интегрирования погрешность будет порядка

$$\frac{(p_0+p)r_0}{\hbar(2j+1)_{\max}}. \tag{76}$$

Средняя величина для интеграла (71) будет совпадать с величиной интеграла (42), т. е. будет

$$\sim \frac{1}{(2j+1)^{\frac{1}{3}}}.$$

После интегрирования у нас получится величина порядка $(2j+1)^{\frac{2}{3}}$. Погрешность же не зависит от j. Поэтому, грубо, можно пользоваться выражением, полученным в (42) для интеграла (71) и

$$-\int_0^c \sqrt{v^2+1}\, dv \cos\left[(2j+1)(v+\operatorname{arc\,ctg} v)-j\pi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}. \qquad (77)$$

Тогда интеграл (70) может быть написан в следующей форме $\left(\text{взяв одновременно } \int \sqrt{v^2+1}\, dv\right)$:

$$\frac{4\pi}{9}\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2 \Delta E(2j+1)(3a_1+a_0)^2\cdot\left\{\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}+\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]+\frac{1}{2}\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\cdot\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\right\}. \qquad (78)$$

Используя формулу (45) для $\sigma_j(p_0)$, мы видим, что (78) можно переписать в форме:

$$\sigma_j(p_0)\Delta E+\frac{4\pi}{9}\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2 \Delta E(2j+1)(3a_1+a_0)^2\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\cdot\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]\right\}. \qquad (79)$$

Окончательно средние потери при возбуждении j-того уровня будут выражаться на основании (66), (69) и (79)

$$\overline{\Delta E_j}\sigma_j(p_0)=2\Delta E\sigma_j(p_0)+\frac{4\pi}{9}\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2\Delta E(2j+1)\times$$

$$\times 3a_1+a_0)^2\left\{\frac{1}{2}\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\cdot\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\right]\right\} \qquad (80)$$

3. Вычисление средних потерь

$$\overline{\Delta E}=\frac{\int_0^{j\max}\Delta E_j\sigma_j(p_0)\,dj}{\sigma(p_0)}. \qquad (66)$$

Согласно (80) и (45) мы будем иметь

$$\Delta E\sigma(p_0)=\frac{4\pi}{9}\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^2\frac{\hbar^2}{4Mr_0^2}(3a_1+a_0)^2\times$$

$$\times\left\{\frac{3}{2}\int\limits_0^{j_{\max}}(2j+1)^3\ln\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\right]^2-1}\,\right]dj+\right.$$

$$+\int\limits_0^{j_{\max}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{3}\,(2j+1)^{\frac{2}{3}}\,dj+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_0^{j_{\max}}\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\right]^2-1}\,(2j+1)^3\,dj\right\} \qquad (81)$$

Обозначим

$$\int\limits_0^{j_{\max}}(2j+1)^3\ln\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}+\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\right]^2-1}\,\right]dj=I_1;$$

$$\int\limits_0^{j_{\max}}(2j+1)\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}\right]^2-1}\,dj=I_2;$$

$$\int\limits_0^{j_{\max}}(2j+1)^{\frac{8}{3}}\,dj=I_3;\quad I_3=\frac{3}{22}(2j+1)^{\frac{4}{3}}_{\max}. \qquad (82)$$

Согласно формуле (51), вводя $\frac{p_0r_0}{\hbar}$ вместо $(2j+1)_{\max}$,

$$I_3=\frac{3}{22}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{11}{3}}\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^{\frac{11}{3}}. \qquad (83)$$

Для вычисления I_1 и I_2 попрежнему применяем подстановку

$$\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}=v.$$

По (53) имеем

$$I_1=8\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\int\limits_0^{\frac{2p_0r_0}{\hbar}}\frac{v^3\left(v^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)^5}\ln\left(v+\sqrt{v^2-1}\right)dv \qquad (84)$$

Попрежнему полагаем верхний предел ∞. Оценка погрешности см. формулу (57). Интегрируя по частям, приводим (84) к виду

$$I_1=2\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\int\limits_1^{\infty}\frac{v^4dv}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)^4\sqrt{v^2-1}}. \qquad (85)$$

Наконец,

$$\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}=\frac{t}{2}$$

и

$$I_1=\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\int\limits_2^\infty\frac{(t^2-4)\,t^4\,dt}{(t^2-1)^4}. \tag{86}$$

Окончательно

$$I_1=8\cdot 0{,}067\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4. \tag{87}$$

I_2 приводится к виду

$$I_2=8\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\int\limits_1^\infty\frac{v^4\left(v^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)^5}\sqrt{v^2-1}\,dv, \tag{88}$$

затем к виду

$$I_2=8\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\frac{3^4}{4^2}\int\limits_2^\infty\frac{(t^2+2)\,t^4\,dt}{(t^2-1)^5}, \tag{89}$$

и, наконец, делается равным

$$I_2=8\cdot 0{,}113\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4.$$

Собирая все результаты, получим

$$\overline{\Delta E}\,\sigma(p_0)=\frac{8\pi}{9}\left(\frac{p_0^2}{M}\right)\left\{0{,}186+0{,}096\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}(3a_1+a_0)^2. \tag{90}$$

Но так как

$$\sigma(p_0)=\frac{8\pi}{9}\left[0{,}342+0{,}190\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right](3a_1+a_0)^2,$$

то:

$$\overline{\Delta E}=\frac{0{,}186+0{,}096\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}}{0{,}342+0{,}190\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}}\,\frac{P_0^2}{M}. \tag{91}$$

Энергия нейтрона до столкновения в покоящейся системе $\frac{(p_0^R)^2}{2M}$, где p_0^R — импульс нейтрона в „лабораторной“ системе. Но, как легко показать, $p_0^R=\frac{3}{2}p_0$; следовательно, энергия в „лабора-

торной" системе будет

$$\frac{9}{4}\frac{p_0^2}{2M}=\frac{9}{8}\frac{p_0^2}{M};$$

отсюда

$$\overline{\Delta E}=\frac{8}{9}\frac{0{,}186+0{,}096\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}}{0{,}342+0{,}190\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}}; \qquad (92)$$

потери энергии весьма слабо зависят от p_0.

IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОРТОВОДОРОДА

1. При вычислении поперечника рассеяния в ортоводороде встречаются следующие различия, по сравнению с параводородом.

1) Начальная волновая функция ортоводорода является первым полиномом Лежандра при $m=0$. Первая присоединенная функция Лежандра при $m=1$.

2) Скачок энергий (разность термов):

$$\Delta E \neq \frac{\hbar}{4Mr_0^2}(2j+1)^2$$

равен

$$\frac{\hbar^2}{Mr_0^2}\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-2\right].$$

2. Согласно формуле (1) и (2)

а) Спин не переворачивается:

$$\sigma_{j,\,0,\,1,\,1,\,01}=\frac{4p}{9p_0}\left[(3a_1+a_0)^2+2(a_1-a_0)^2\right]\times\frac{1}{3}\times$$

$$\times\left[\left|\int\limits_0^\pi \cos(Ar_0\cos\theta)P_j(\cos\theta)\cdot\cos\theta\,2\pi\sin\theta\,d\theta\right|^2\times\right.$$

$$\times\frac{2j+1}{4\pi}\cdot\frac{3}{2}+\left|\int\limits_0^\pi \cos(Ar_0\cos\theta)\sin\theta\frac{dP_j(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\sin\theta\,2\pi\sin\theta\,d\theta\right|^2\times$$

$$\left.\times\frac{2j+1}{4\pi}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{j(j+1)}\cdot\frac{1}{2}\right]. \qquad (93)$$

Первый интеграл в (93) отвечает $m=m'=0$.

Мы будем вычислять только второй интеграл $m=m'=1$.

б) Если спин переворачивается, то вместо $(3a_1+a_0)^2+2(a_1-a_0)^2$ нужно поставить $(a_1-a_0)^2$ и заменить $\cos(Ar_0\cos\theta)$ на $\sin(Ar_0\cos\theta)$.

Для вычисления интеграла, стоящего в скобках, рассмотрим

$$\int_{-1}^{+1} e^{iAr_0t}(1-t^2)\frac{dP_j(t)}{dt}\,dt = I. \tag{94}$$

Этот интеграл при четных j чисто мнимый и равен

$$i\int_{-1}^{+1} \sin(Ar_0t)(1-t^2)\frac{dP_j(t)}{dt}\,dt.$$

При нечетном j он вещественен и равен

$$\int_{-1}^{+1} \cos(Ar_0t)(1-t^2)\frac{dP_j(t)}{dt}\,dt.$$

Вводя обозначение

$$f_j(Ar_0) = \int_{-1}^{+1} e^{iAr_0t} P_j(t)\,dt$$

и интегрируя (94) по частям, получим

$$I = -iAr_0\left[\frac{d^2f_j}{d(Ar_0)^2} + \frac{2}{Ar_0}\frac{df_j}{d(Ar_0)} + f_j(Ar_0)\right]. \tag{95}$$

Можно показать, что f_j удовлетворяет дифференциальному уровню (см. [3])

$$\frac{d^2f_j}{d(Ar_0)^2} + \frac{2}{Ar_0}\frac{df_j}{d(Ar_0)} + \left(1 + \frac{j(j+1)}{(Ar_0)^2}\right)f_j = 0. \tag{96}$$

Тогда выражение (95) приводится

$$-iAr_0\frac{j(j+1)}{(Ar_0)^2}f_j = -i\frac{j(j+1)}{Ar_0}\int_{-1}^{+1} e^{iAr_0t} P_i(t)\,dt \tag{97}$$

Этот интеграл был нами взят при рассмотрении рассеяния в параводороде.
Тогда получим:

1) (спин не переворачивается):

$$\sigma_{j,\,01,\,1,\,0,\,1}(\theta) = \frac{4p}{9p_0}\left[(3a_1 + a_0)^2 + 2(a_1 - a_0)^2\right] \times$$
$$\times \frac{2j+1}{8}\cdot j(j+1)\cdot\frac{2\pi}{(Ar_0)^3} I^2_{j+\frac{1}{2}}(Ar_0); \tag{98}$$

2) (спин переворачивается):

$$\sigma_{j,\,0,\,0,1,\,01}(\theta) = \frac{4p}{9p_0}(a_1 - a_0)^2\frac{2j+1}{8}j(j+1) \times$$
$$\times \frac{2\pi}{(Ar_0)^3} I^2_{j+\frac{1}{2}}(Ar_0).$$

*

3. Для вычисления полного поперечника (98) нужно интегрировать по θ. Опять применяя ассимптотическое разложение Бесселевой функции, получим

$$\sigma_{j,\,0,\,1,\,1,\,01}(\theta)=\frac{4p}{9p_0}(a_1-a_0)^2\,\frac{2j+1}{8}\cdot j(j+1)\times$$

$$\times\frac{1}{a\,(Ar_0)^4}\sin^2\left[Ar_0a+\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos a-\frac{j\pi}{2}\right];$$

$$\sigma_j(p_0)=\int_0^{\pi}\sigma_j(\theta)\,2\pi\sin\theta d\theta. \qquad (99)$$

Произведя замену переменных (34), получим

$$\sigma(p_0)=\frac{2\pi}{9}(a_1-a_0)^2\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^2(2j+1)\times$$

$$\times\int_0^C\frac{dv}{\sqrt{(v^2+1)^3}}\left\{1-\cos\left[(2j+1)(v+\operatorname{arcctg}v)-j\pi\right]\right\}. \qquad (100)$$

Второй член попрежнему вычисляем „методом перевала“, первый член берется сразу:

$$\sigma_j(p_0)=\frac{2\pi}{9}(a_1-a_0)^2\,(2j+1)\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^2\times$$

$$\times\left[\frac{(2j+1)\hbar}{(p_0+p)r_0}\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}}\right]. \qquad (101)$$

4. Произведем интеграцию по j:

$$\sigma(p_0)=\int_0^{j_{\max}}\sigma_j(p_0)\,dj;$$

$$\sigma(p_0)=\frac{2\pi}{9}\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^2(a_1-a_0)^2\cdot\left[\int_0^{j_{\max}}(2j+1)\cdot\frac{(2j+1)\hbar}{(p_0+p)r_0}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\left[\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2-1}\,dj+\sqrt[3]{3}\int_0^{j_{\max}}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)(2j+1)^{\frac{2}{3}}dj\right]. \qquad (102)$$

Второй интеграл равен

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{3}\,\frac{3}{10}(2j+1)_{\max}^{\frac{5}{3}}. \qquad (103)$$

Для вычисления первого интеграла опять, как и в (53), введем переменную

$$v=\frac{(p_0+p)r_0}{(2j+1)\hbar}.$$

Однако в случае ортоводорода связь между p_0+p и $2j+1$ несколько иная. В то время как в случае параводорода мы имели

$$\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}=v \quad \text{и} \quad p_0^2-p^2=\frac{1}{3}\,\frac{\hbar^2\,(2j+1)^2}{r_0^2},$$

здесь мы имеем

$$\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}=v \quad \text{и} \quad p_0^2-p^2=\frac{1}{3}\,\frac{\hbar^2}{r_0^2}\,[(2j+1)^2-8].$$

Докажем, что и в случае ортоводорода, с точностью до величин порядка $\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2$ можно пользоваться параводородным выражением

$$p=\frac{(2j+1)\,\hbar v}{r_0}-p_0;$$

$$p^2=\frac{(2j+1)^2\,\hbar^2}{r_0^2}\,v^2-\frac{2\,(2j+1)\,\hbar}{r_0}\,p_0 v+p_0^2 \tag{104}$$

и, следовательно,

$$p_0^2-\frac{1}{3}\,\frac{\hbar^2}{r_0^2}[(2j+1)^2-8]=\frac{(2j+1)^2\,\hbar^2}{r_0^2}\,v^2-$$
$$-\frac{2\,(2j+1)\,\hbar}{r_0}\,p_0 v+p_0^2.$$

Решая, получим

$$2v=\frac{(2j+1)\,\hbar}{p_0 r_0}\left(v^2+\frac{1}{3}\right)-\frac{8}{3}\,\frac{\hbar}{p_0 r_0}\,\frac{1}{2j+1}\,. \tag{105}$$

Это уравнение относительно $(2j+1)$, которое необходимо разрешить.

Первым приближением является решение, полученное нами для параводорода (53)

$$(2j+1)=\frac{p_0 r_0}{\hbar}\cdot\frac{2v}{v^2+\frac{1}{3}}.$$

Второе приближение будет

$$(2j+1)=\frac{p_0 r_0}{\hbar}\,\frac{2v}{v^2+\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}\,\frac{\hbar}{p_0 r_0}\,\frac{1}{v}. \tag{106}$$

$\left(v \text{ изменяется от } 1 \text{ до } \frac{2p_0 r_0}{\hbar}\right)$.

Но так как мы предполагаем, что нейтрон имеет энергию, достаточную для возбуждения высоких квантовых уровней, то $\frac{p_0 r_0}{\hbar}$ велико и мы видим, что с точностью до $\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2$ можно пренебречь поправочным членом. Следовательно, попрежнему справедливо (53), и $j=j_{max}$ при $v=1$ и опять-таки

$$(2j+1)_{max}=\frac{3}{2}\,\frac{p_0 r_0}{\hbar}.$$

Тогда (103) преобразуется

$$\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{107}$$

Первый же интеграл в (102) будет

$$\frac{4\pi}{9}(a_1-a_0)^2\int\limits_1^{\frac{2p_0r_0}{\hbar}}\frac{v^2-\frac{1}{3}}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)^3}\sqrt{v^2-1}\,dv. \tag{108}$$

Относительно зависимости интеграла (108) от всего верхнего предела можно повторить все сказанное об интеграле (54), т. е. что верхний предел можно положить равным ∞. Вычислением, совершенно аналогичным произведенным ранее, получим

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{v^2-\frac{1}{3}}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)^3}\sqrt{v^2-1}\,dv=0{,}211\,. \tag{109}$$

Если спин не переворачивается, то нужно заменить $(a_1-a_0)^2$ на

$$[(3a_1+a_0)^2+2(a_1-a_0)^2]$$

и окончательно

$$\sigma(p_0)=\frac{4\pi}{9}(a_1-a_0)^2\left[0{,}211+0{,}190\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

V. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ОРТОВОДОРОДЕ

При вычислении потерь энергии можно употреблять те же формулы, что и в случае параводорода, а именно

$$\Delta E'=\frac{2}{3}\Delta E+\frac{p_0}{2M}(p_0-p\cos\theta)\,.$$

1. Вычислим

$$\overline{\Delta E_j}=\frac{\int\limits_0^{\pi}\Delta E'\sigma_j(\theta)\,2\pi\sin\theta\,d\theta}{\int\limits_0^{\pi}\sigma_j(\theta)\,2\pi\sin\theta\,d\theta}\,.$$

Вычисление интегралов ведется совершенно аналогично сделанному в разделе о параводороде.

Попрежнему

$$\Delta E'=\Delta E+\frac{\hbar}{4Mr_0^2}(2j+1)^2(v^2+1)$$

и опять

$$\overline{\Delta E_j} = \Delta E + \frac{1}{\sigma_j} \int_0^{\pi} \frac{\hbar^2}{4Mr_0^2} (2j+1)^2 (v^2+1) \sigma_j(\theta) 2\pi \sin\theta \, d\theta. \quad (110)$$

Производя замену переменных в $\sigma_j(\theta)$, получим

$$\overline{\Delta E_j} = \Delta E + \frac{1}{\sigma_j} \Delta E (2j+1) \cdot \frac{2\pi}{9} \left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2 (a_1 - a_0)^2 \times$$

$$\times \int_0^C \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} \{1 - \cos[(2j+1)(v + \operatorname{arc\,ctg} v) - j\pi]\} \quad (111)$$

Этот интеграл совпадает с (35).

Таким образом

$$\Delta E_j = \Delta E + \frac{1}{\sigma_j} \Delta E \cdot \frac{2\pi}{9} \left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2 (2j+1)(a_1 - a_0)^2 +$$

$$+ \left\{ \ln\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar} + \sqrt{\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2 - 1}\right] + \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{3}{2j+1}} \right\}. \quad (112)$$

Таким образом, вычисление $\overline{\Delta E_j}$ выполнено.

2. Вычислим, наконец, $\overline{\Delta E}$

$$\overline{\Delta E} = \frac{\int_0^{j_{\max}} \overline{\Delta E_j} \sigma_j(p_0) \, dj}{\sigma(p_0)} \quad (113)$$

с точностью до величин порядка $\left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{4Mr_0^2} (2j+1)^2. \quad (114)$$

Тогда

$$\int_0^{j_{\max}} \overline{\Delta E_j} \sigma_j(p_0) \, dj = \frac{\hbar^2}{4Mr_0^2} \cdot \frac{2\pi}{9} \cdot \left(\frac{\hbar}{p_0 r_0}\right)^2 \times$$

$$\times (a_1 - a_0)^2 \left[\int_0^{j_{\max}} (2j+1)^3 \frac{(2j+1)\hbar}{(p_0+p) r_0} \sqrt{\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2 - 1} \, dj + \right.$$

$$+ \int_0^{j_{\max}} (2j+1)^3 \ln\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar} + \sqrt{\left[\frac{(p_0+p) r_0}{(2j+1)\hbar}\right]^2 - 1}\right] dj +$$

$$\left. + \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{3} \int_0^{j_{\max}} (2j+1)^{\frac{8}{3}} \, dj \right]. \quad (115)$$

Вычислим сразу третью часть. Это будет

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{3}\,\frac{3}{22}(2j+1)_{\max}^{\frac{11}{3}}=\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt[3]{3}\,\frac{3}{22}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{11}{3}}\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^{\frac{11}{3}}. \qquad (116)$$

Первый и второй интегралы вычисляются посредством замены переменных

$$\frac{(p_0+p)\,r_0}{(2j+1)\,\hbar}=v.$$

Первый приведется к

$$8\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\int\limits_1^{\frac{2p_0r_0}{\hbar}}\frac{v^3\left(v^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)^5}\ln\left(v+\sqrt{v^2-1}\right)dv. \qquad (117)$$

а второй к

$$8\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\int\limits_1^{\frac{2p_0r_0}{\hbar}}\frac{v^3\left(v^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(v^2+\frac{1}{3}\right)}\ln\left(v+\sqrt{v^2-1}\right)dv. \qquad (117\text{-a})$$

Интеграл (117-а) уже вычислялся (84) (87). Он равен

$$8\cdot 0{,}067\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4.$$

Интеграл (117), будучи вычислен аналогичным способом, оказывается равным

$$8\left(\frac{p_0r_0}{\hbar}\right)^4\cdot 0{,}040.$$

Собирая вместе все результаты, получим

$$\overline{\Delta E}=\frac{0{,}107+0{,}096\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}p_0^2}{0{,}211+0{,}190\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}M} \qquad (118)$$

или

$$\overline{\Delta E}=\frac{8}{9}\,\frac{0{,}107+0{,}096\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)^{\frac{1}{3}}}{0{,}211+0{,}190\left(\frac{\hbar}{p_0r_0}\right)}\,E_0. \qquad (118\text{-a})$$

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод, примененный здесь к вычислению поперечника рассеяния нейтронов в водороде, очевидно может быть применен и для других газов. Однако при этом возникают значительные матема-

тические трудности при вычислении интегралов, входящих в формулы (1) и (2), так как уже нельзя будет считать молекулу не возбужденной до столкновения.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность И. Я. Померанчуку за предложение темы и внимательное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phys. Rev., 52, 286, 1937.
2. Фаркас, Ортоводород, параводород, тяжелый водород, ОНТИ, 1936.
3. Мотт и Месси, Теория атомных столкновений, ОНТИ, 1936.
4. Смирнов, Курс высшей математики, т. III.
5. Nickolson, Phil. Mag., XIV (6), 697, 1907.
6. Бете-Бечер, Физика ядра, ч. 1, ОНТИ НКТП, 1936.

ОБ ОБОСНОВАНИЯХ ФИЗИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Н. С. Крылов

Основной вопрос физической статистики — это вопрос о характеристике временного ансамбля рассматриваемой системы, т. е. ансамбля, определяющего временно́е изменение системы. Например, в классической статистике — это множество точек в фазовом пространстве всей системы, которые отмечают места пребывания системы в определенные моменты времени.

Основатели физической статистики (Максвелл, Больцман, Гиббс) решали этот вопрос при помощи произвольно принятой гипотезы. Была создана эргодическая гипотеза, по которой, если энергия системы заключена между E и $E+dE$, то все положения изображающей систему точки в этом слое одинаково вероятны (точнее, вероятность некоторой области внутри слоя пропорциональна объему этой области).

Эргодическая гипотеза обеспечивает выполнение основных статистических соотношений, требуемых опытом: канонического распределения по энергии для малой части большой эргодической изолированной системы и H-теоремы, — вернее, соотношения, близкого к требуемой опытом H-теореме. В частности, для малой части C_1 большой системы C вероятность иметь энергию в пределах E_1 и E_1+dE_1 будет пропорциональна объему той части бесконечно тонкого слоя dE, в точках которой энергия нашей подсистемы будет в заданных пределах; деля объем этой части на объем всего слоя, мы получим уже нормированную вероятность, а именно:

$$V(E_1)\,dE_1 = \frac{\dfrac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1}\,\dfrac{d\Phi_2(E-E_1)}{dE}\,dE_1 dE}{dE\displaystyle\int_0^E \frac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1}\,\frac{d\Phi_2(E-E_1)}{dE}\,dE_1},$$

где $\Phi_1(E_1)$ и $\Phi_2(E_2)$ суть $2k$ и $2(n-k)$-мерные фазовые объемы — части фазового пространства подсистемы и второй части — дополнительной к первой части — системы, ограниченные энергетическими поверхностями E_1 и E_2 — соответственно. При этом предполагается, что $E_1+E_2=E$, т. е., что можно пренебречь энергией взаимодействия.

$$\log\frac{(E_2)\,d\Phi}{dE_2}$$

может быть разложен в ряд Тейлора около точки $E_2 = E_{2m}$ — наиболее вероятной энергии второй части нашей системы, дополнительной к рассматриваемой подсистеме.

Ограничиваясь отклонениями ΔE_2, которые малы по сравнению с E_2 (но эти $\Delta E_2 = -\Delta E_1$ вполне могут быть сравнимы с энергией E_1 малой части), в разложении мы можем ограничиться первым членом

$$\log \frac{d\Phi_2(E_2)}{dE_2} = \log \frac{d\Phi_2(E_2)}{dE_2}\Big|_{E_2 = E_{2m}} + \frac{\partial \log \Pi_2}{dE_2}\Big|_{E_2 = E_{2m}} \Delta E_2 + \ldots ,$$

где

$$\Pi_2 = \frac{\partial \Phi_2(E_2)}{dE_2}$$

пропорционально площади гиперповерхности энергии, равной E_2. По определению

$$k \log \Pi_2 = S_2,$$

а

$$\frac{\partial \log \Pi_2(E_2)}{\partial E_2}\Big|_{E_2 = E_{2m}} = \frac{1}{kT};$$

следовательно,

$$\frac{d\Phi_2(E_2)}{dE_2} = \frac{d\Phi_2(E_2)}{dE_2}\Big|_{E_2 = E_{2m}} e^{\frac{\Delta E_2}{kT}};$$

тогда:

$$V(E_1)\,dE_1 = \frac{\frac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1} dE_1 \frac{d\Phi_2(E_2)}{dE_2}\Big|_{E_2 = E_{2m}} e^{\frac{E_{1m} - E_1}{kT}}}{\int\limits_0^E \frac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1} \frac{d\Phi_2(E - E_2)}{dE} dE_1};$$

так как $\Delta E_2 = E_2 - E_{2m} = E_{1m} - E_1$, следовательно

$$V(E_1)\,dE_1 = C \cdot e^{-\frac{E_1}{kT}} \frac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1} dE_1,$$

где C — константа, равная

$$\frac{\frac{d\Phi_2(E_2)}{dE_2}\Big|_{E_2 = E_{2m}} e^{\frac{E_{1m}}{kT}}}{\int\limits_0^e \frac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1} \frac{d\Phi_2(E - E_2)}{dE} dE_1}$$

и не зависящая от E_1, а

$$\frac{d\Phi_1(E_1)}{dE_1} dE_1$$

объем фазового пространства системы C_1, для которого энергия лежит в пределах E_1, $E_1 + dE_1$. C, определится из условий нормировки.

Таким образом, малая часть эргодической системы подчиняется распределению Гиббса.

Фигурирующая в эргодической гипотезе равновероятность всех точек внутри эргодического слоя допускает выражение в терминах классической механики. А именно при заданной неопределенности энергии системы dE траектория изолированной системы должна проходить при безграничном во времени продолжении движения через все фазовые точки, совместимые с заданной общей энергией системы; при этом времена пребывания (пределы времен пребывания) в равных объемах равны.

Сформулировав так эргодическую гипотезу (причем вторая часть гипотезы следует из первой), П. Эренфест выразил сомнение в ее правильности.

В 1913 г. Розенталем и351 Планшерелем была доказана невозможность определенного по Эренфесту эргодического движения.

Исходя из идей Броуэра о невозможности взаимнооднозначных и непрерывных отображений множеств различного числа измерений (взаимнооднозначное и взаимнонепрерывное отображение точек энергетической поверхности $E = C$ и точек временной прямой будет иметь место лишь при конечных, ограниченных временах, и поэтому теорема Броуэра сюда непосредственно применена быть не может), Розенталь пришел к выводу о необходимости положить в основание физической статистики так называемую квазиэргодическую гипотезу: „... при достаточно длительном продолжении движения во времени изолированная система сколь угодно близко подходит к любой заданной фазовой точке, совместимой с энергией системы“.

Рассматриваемая таким образом, эргодическая гипотеза придает всем статистическим утверждениям не вероятностный, а механически необходимый характер. (При этом они делаются применимыми при $t \to \infty$.)

Вероятность состояния s_i-системы определяется отношением $\lim\limits_{T \to \infty} \frac{t_i}{T}$, где T полное время, в течение которого рассматривается система, а t_i — время, в течение которого система была в состоянии s_i. Можно определять вероятность подобно предыдущему, но без стремления к пределу, при конечном, определенном T.

Во всяком случае это, особенно развитое Эйнштейном, понятие вероятности по существу является отказом от вероятностного рассмотрения статистической физики.

Так как при этом эргодическая гипотеза оказывается утверждением чистой механики, то перед математиками встала задача определения того класса механических движений, для которых имеют место условия эргодичности (понимая это слово в широком смысле, включая сюда и квазиэргодичность).

Основной полученный в этом отношении результат заключается в том, что те утверждения, которые можно сделать на основании одних уравнений механики, недостаточны для обоснования эргодичности. Это совершенно естественно, так как все извест-

ные нам системы не являются эргодическими. Нам неизвестны примеры однократно импримитивных (квазиэргодических) систем (p-кратно импримитивной системой называют, по Леви-Чевита, систему, содержащую не более чем p однозначных интегралов), если не говорить о таких примерах, как движение с одной степенью свободы; во всяком случае подавляющее большинство систем не таково — и нет достаточных оснований считать, что там, где из-за сложности движений мы не можем провести полное исследование, там и будут осуществляться эти однократно импримитивные системы.

Универсально справедливые результаты механики, т. е. результаты, основывающиеся лишь на существовании интегрального инварианта, дифференциальных уравнений движения, даваемого теоремой Лиувилля, заключаются в следующем (см. Hopf, E. Ergodentheorie, 1937, где дается обзор основных в этой области работ Бирхгофа, Неймана, Хинчина, Рисса, Хопфа и др.): доказывается существование предела $\frac{t}{T}$, где t — время пребывания системы в объеме $\Delta\Gamma$ своего фазового пространства; предел этот существует почти для всех начальных положений системы в точке P, т. е. предел не существует, самое большое, для множества точек P меры 0.

Рассматриваемый предел автоматически дается выражением

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)\,dt,$$

где P_t положение точки P через время t, а $f(R)$ — характеристическая функция множества $\Delta\Gamma$, т. е.

$$f(R)=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\begin{cases}R \text{ вне } \Delta\Gamma;\\ R \text{ в } \Delta\Gamma.\end{cases}$$

Для простоты доказательства необходимо обобщить это рассмотрение. Для всякой функции $f_0(P)$ вводим функцию $f_t(P)$, равную $f_0(P_t)$, и вводим оператор U_t таким образом, что

$$f_t(P)=U_t\,[f_0(P)];$$

если $f_0(P)$ характеристическая функция $\Delta\Gamma$, то

$$f_t(P)=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\begin{cases}\text{если } P_t \text{ вне } \Delta\Gamma;\\ \text{если } P_t \text{ в } \Delta\Gamma.\end{cases}$$

Благодаря теореме Лиувилля при преобразовании U_t норма функции $f(P)$ (определенная в пространстве L^2) не меняется; следовательно, оператор U_t унитарен. U_t обладает следующими очевидными свойствами $U_{t1}\cdot U_{t2}=U_{t1+t2}$

$U_0 = \mathrm{I}$ — единичный оператор.

Таким образом, доказательство существования предела

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T U_t f dt = f^*, \qquad (*)$$

в смысле сильной сходимости в функциональном пространстве, есть доказательство существования соотношения

$$\lim_{T\to\infty}\left\|\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)\,dt - f^*(P)\right\| = 0. \qquad (**)$$

В силу общих свойств унитарных операторов (наличия среднего арифметического возрастающих целых степеней оператора; как показал Рисс, это свойство имеет место и у гораздо более широкого класса операторов, чем унитарные) равенство (*) всегда будет иметь место, и каждая принадлежащая L^2 (пространству H) функция $f(P)$ обладает вследствие равенства (**) также принадлежащим L^2 средним во времени $f^*(P)$ в смысле сильной сходимости. $f^*(P)$ инвариантна относительно преобразования U_t, что очевидно по определению U_t, если учесть, что $f^*(P)$ — как предел среднего во времени — постоянно вдоль фазовых траекторий.

Кроме того, можно доказать обычную сходимость

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)\,dt$$

к $f^*(P)$ почти во всех P. Полученный результат (существование предела $\frac{t}{T}$ для любого измеримого $\Delta\Gamma$ для почти всех начальных положений системы P), справедливость которого основана лишь на справедливости уравнения механики, при всей своей принципиальной ценности для статистики, конечно совершенно недостаточен, как и другие столь же общие результаты, для получения основных соотношений статистики (Гиббсово распределение для малой части статистической системы и H-теорема). Те же условия, которые необходимо наложить на механическую систему для того, чтобы сделать движение эргодическим (когда для каждого $f(P)$ из L^2 среднее во времени — при конечной мере всего фазового пространства системы Ω — почти везде в фазовом пространстве постоянно), оказываются либо невыполненными, либо не поддающимися проверке.

Оказывается, что при конечной мере Ω эргодичность эквивалентна так называемой метрической транзитивности; метрически транзитивным движение называется тогда, когда для всякого измеримого и инвариантного (т. е. переходящего само в себя) множества A — или A, или $\Omega - A$ являются нулевым множеством (при этом определении $m(\Omega)$ может быть как конечным, так и бесконечным).

Понятие метрической транзитивности, обладая несколько большей наглядностью, чем понятие эргодичности, тем не менее не дает эффективных средств для того, чтобы судить о ширине класса объектов, к которым приложима физическая статистика и для которых справедливы основные ее утверждения. Таким образом, те требования, которые предъявляет математика к механическим движениям для того, чтобы узаконить утверждения статистической механики, оказываются слишком строгими и слишком мало поддающимися проверке в том смысле, что для большинства объектов, с которыми имеет дело статистика, нет возможности решить, удовлетворяют они этим математическим требованиям или нет.

Затруднения, связанные с утверждением, что явления, для которых справедлива Гиббсова статистика, не нуждаются для своего рассмотрения ни в чем, кроме уравнений классической механики, и которые служат, таким образом, достаточным основанием для всех утверждений статистической физики, — эти затруднения не сводятся лишь к трудностям решения соответствующей математической задачи классической механики. Помимо этого рода трудностей (трудностей совершенно принципиальных, так как совершенно непреодолимых), указанная точка зрения на связь Гиббсовой статистики и механики встречает возражения еще в следующих двух отношениях. Во-первых, сама возможность говорить об определенном классически описанном микросостоянии системы кажется спорной (не в смысле логической противоречивости: классическая картина в этом отношении целиком сохраняет свою ясность, а в смысле того необходимого согласования с опытом, которое может потеряться, коль скоро в опыте, направленном на определение микроскопического состояния системы, нельзя будет пренебречь квантовым характером поведения системы, — тем более что в самой классической картине речь идет о максимально полном определении микросостояния, о микросостоянии как о точке в фазовом пространстве системы). Во-вторых возникают возражения против самой попытки ограничить понятия физической статистики кругом понятий классической механики: возражения, сохраняющие значение и при целиком решенной механической задаче, — возражения, связанные с необходимостью введения в статистику вероятностных представлений, — из-за самого специфического взаимоотношения исследователя и объекта, характерного для постановки задачи в физической статистике.

Допустим (а это для обычных объектов статистики невозможно), что мы целиком решили механическую задачу и при определенных начальных условиях знаем микроскопическое состояние системы для любого будущего момента времени; при этом мы знаем, конечно, и смену макроскопических состояний системы, определенных при помощи заданного макроскопического опыта, способного решить, в какой из областей фазового пространства находится система, причем вид этих областей определяется характером самого опыта.

(Связь между точкой в фазовом пространстве и совокупностью областей, различимых макроскопическим опытом, вид которых определяется этим опытом и которые, тем не менее, не имеют твердых границ, так как для макроскопического наблюдателя состояние системы не меняется скачком, когда микроскопическая фазовая траектория из одной области переходит в другую, — эта связь совершенно аналогична соотношению физической и математической непрерывности у Пуанкаре [см. Наука и гипотеза, гл. II].)

Мы знаем и энтропию системы (определенную, например, как логарифм области фазового пространства, соответствующей данному макроскопическому состоянию) как функцию времени.

С точки зрения классической физики (где знание всего вышеуказанного может быть приобретено без существенного воздействия на систему) *H*-теорема принимает в этом случае следующий вид: наносим на график (рис. 1) энтропию S как функцию времени t; тогда при беспредельно возрастающем времени система успеет из начального состояния перейти в равновесное и испытать беспредельно возрастающее число флюктуаций; в этих условиях *H*-теорема гласит: если задана энтропия системы, в некоторый момент времени t, то в некоторый соседний момент времени подавляюще вероятно, что энтропия будет больше (если в начальный момент времени энтропия уже не была равна S_{max}), т. е. — по графику — если мы получили значение энтропии S_1, то подавляюще вероятно, что это состояние соответствует точке типа *a* в противоположность точке типа *б*. (Высказанная так *H*-теорема содержит в себе и шредингеровское „отражение *H*-теоремы во времени“, т. е. явно содержит симметрию во времени.)

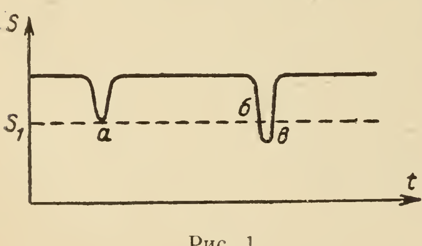


Рис. 1.

Такое утверждение может быть оправдано нашей предыдущей картиной, если наше исследование микроскопической эволюции системы показало, что сравнительное число флюктуаций типа *a* подавляюще больше числа флюктуаций типа *б* — *в*.

Мы считаем, что опыт, который нам дал $S = S_1$, показывает, что в действительности осуществляется какая-нибудь из точек пересечения кривой $S = S(t)$ и прямой $S = S_1$ и так как среди последних сравнительно больше точек, после которых начинается возрастание энтропии, чем точек, после которых энтропия еще убывает, то более вероятно, что мы имеем дело с точкой типа *a* (а не *б*), что и требовалось *H*-теоремой.

Отсюда можно заключить, во-первых, что мы вынуждены были ввести вероятностные представления, необходимые по самой постановке задачи, что физическая статистика не может обойтись без представлений такого рода. Во-вторых, мы можем утверждать, что, более того, та форма введения вероятностных

понятий, которая здесь имеет место, вообще не может быть признана удовлетворительной. Действительно, утверждая, что точки типа *а* „более вероятны“, чем точки типа *б*, мы не вкладываем в эти слова иного смысла, чем тот, который содержится в утверждениях: точек типа *а* сравнительно больше, чем точек типа *б*, и каждая из „подозреваемых“ нами точек, полученных при пересечении кривой $S = S(t)$ и прямой $S = S_1$, одинаково вероятна. Вот это последнее утверждение и оказывается противоречивым. Необходимо иметь в виду, что, как писал Пуанкаре, теория вероятностей не является чудесным даром из неизвестного получать известное, а является способом преобразования нашего знания в единую математическую схему; что применение понятия вероятности требует точно определенных предпосылок и что, в частности, построение теории вероятностей как единого непротиворечивого метода познания требует придания коэффициентам 0 и 1 совершенно точного смысла: коэффициент 1 указывает на истинность, а 0 — на ложность предложения. Недостаточно отчетливое признание категорической необходимости удовлетворения этих условий для применения понятия вероятности к бесконечным совокупностям привело, как показал академик С. Н. Бернштейн, к целому ряду парадоксов и ошибок даже у крупнейших математиков.

Поэтому необходимо признать, что всякое построение, приводящее к бесконечной (счетной) последовательности несовместимых равновероятных случаев, злоупотребляет понятием вероятности: каждому из таких случаев мы не можем соотнести никакого значения математической вероятности — ни конечного, ни равного 0 коэффициента. С этой точки зрения, следует отказаться от основанного на классической механике вышеизложенного толкования *H*-теоремы. Кроме того, спорна сама возможность сделать акт нашего опыта в данный момент объектом вероятностного рассмотрения: утверждая, что наблюдатель, вошедший в комнату, где стоит сосуд с газом, одинаково вероятно может застать любой из равных по длине во времени участков фазовой микроскопической кривой, мы тем самым утверждаем (если уж мы создали понятие нашей единой бесконечной фазовой кривой, с которой мы теперь можем связать часы, конечно, такие же, как раньше у наблюдателя), что наблюдатель одинаково вероятно может войти в любой из моментов времени, а такое предположение, не допускающее эмпирического определения вероятностей, не допускающее статистического их измерения, вряд ли может послужить основанием плодотворного вероятностного построения в физической статистике, занимающейся вопросом о связи данных опытов друг с другом.

Но не только вероятностное толкование *H*-теоремы на основании классической механики не может быть достигнуто. До сих пор не удалось получить, исходя из уравнений Гамильтона, даже приблизительного подобия закона возрастания энтропии. Обычное определение энтропии как меры незнания микроскопи-

ческого состояния — логарифма объема в физическом пространстве — не дает по теореме Лиувилля возрастания.

Единственное определение энтропии в данный момент, лишенное произвола в определении энтропии в следующий момент и в то же время имеющее смысл в связи с динамикой процесса, т. е. с H-теоремой (в противоположность таким определениям, как логарифм всего ограниченного поверхностью энергии фазового объема), это — определение энтропии как логарифма объема в фазовом пространстве, реализующего данное макросостояние (см. стр. 79—80).

Но и это определение не может быть проведено в классической картине последовательно: в этой картине вполне допустимы такие опыты, как точное определение энергии, а такой опыт даст для энтропии $\log 0 = -\infty$. Поэтому можно думать, что трудности получения H-теоремы из классических представлений являются совершенно принципиальными трудностями, что причины их лежат особенно глубоко.

Затруднения той же природы и той же глубины возникают при изучении функций распределения — изучении распределения значений физических величин во времени. Это становится особенно ясным, если явно ввести те вероятностные представления, которые неизбежно содержатся — по самой сути постановки задачи — в физической статистике. Действительно, статистическая механика имеет своим объектом ряд последовательных во времени опытов, между исходами которых не может быть установлена однозначная связь. Последовательности зависимых испытаний были объектами многих математических исследований. При определенных предпосылках удается доказать не только соотношения, аналогичные эргодичности (существование стационарного решения, представляемого равномерным распределением вероятностей), но и установление этого конечного распределения независимо от начального распределения, что тоже является характерной чертой физической статистики, имеющей дело с тем бесспорным опытным фактом, что всякое начальное состояние через сравнительно короткий промежуток времени с подавляющей вероятностью переходит в стационарное состояние, лишающее макроскопического наблюдателя возможности судить о его прошлом.

Если дана последовательность опытов E_i, допускающих по s исходов каждый, и последовательность величин x_i, то в случае, если эти величины образуют цепь (по Маркову — т. е. если вероятность $p_{k,l}^{i+1}$ различных исходов в $(i+1)$-ом опыте определена при установленном исходе i-го опыта и независима от результатов предшествующих опытов) и если вероятности перехода не зависят от номера опыта, мы получим для вероятности равенства $x_n = a_l$, обозначаемой $P_l^{(n)}$:

$$P_l^{(n)} = \sum_1^s P_i^{(n-1)} p_{il} \qquad \sum_{l=1}^s p_{il} = 1.$$

Отсюда для стационарного состояния:

$$P_l = \sum_{i=1}^{s} P_i p_{il}.$$

Стационарное состояние всегда возможно — при любых $p_{ik} \geqslant 0$; если $p_{ik} = p_{ki}$, то в стационарном состоянии всегда будет равномерное распределение вероятностей:

$$P_i = \frac{1}{s}.$$

Стационарное решение единственно тогда, и только тогда, когда $\lambda = 1$ — простой корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda, & p_{21} & \ldots\ldots & p_{s,1} \\ p_{12}, & p_{22}-\lambda & \ldots\ldots & p_{s,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{1s}, & \ldots & \ldots\ldots & p_{ss}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Когда все $p_{ik} > 0$, то стационарная система не только единственна, но и осуществляется в пределе при любом первоначальном распределении вероятностей. Поэтому в условиях, определяемых сделанными допущениями, по истечении времени t (достаточно большого по сравнению с временем τ, для которого верно равенство коэффициентов $p_{ik} = p_{kl}$) все положения изображающей точки в фазовом пространстве делаются равновероятными, т. е. вероятность нахождения изображающей точки в некотором объеме оказывается пропорциональной величине этого объема.

Закон больших чисел, применимый к цепям Маркова, для времени t пребывания системы в объеме $\Delta\Gamma$ дает с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равенство:

$$t = T\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma},$$

если система рассматривается за достаточно большой промежуток времени T (Γ — объем всего фазового пространства системы).

Но, к несчастью, эти дающие все, что нам надо, результаты не могут быть получены на основании классической механики. Не оправдывается основное предположение, что стохастические процессы (т. е. совокупности x_t $(-\infty < t < +\infty)$ случайных величин, зависящие от параметра t), с которыми мы имеем дело в статистике, являются процессами Маркова (обобщениями цепей Маркова на непрерывные во времени схемы); т. е. что в каждый данный момент дальнейший ход процесса — закон распределения x_t в следующие моменты — целиком обусловливается заданием его состояния в этот момент, не зависися от характера течения процесса в предшествующий период.

Дело в том, что, оставаясь на почве классической механики, мы лишены возможности констатировать экспериментально точное равенство величин; мы измеряем не функции точек, а функции

*

областей; мы можем задавать положение системы лишь интервалом в фазовом пространстве и можем отмечать лишь переходы между такими конечными интервалами. Всякие функции точек, и в частности функция распределения в фазовом пространстве (как функция p_i и q_i) являются плодом незаконного перехода к пределу и могут служить источником ошибок в рассуждении тогда, когда используется то их свойство, которое порождено предельным переходом: когда мы образуем плотность как функцию точки, то мы исходим из конечного отношения $\frac{\Delta m}{\Delta v}$; по существу, переход к пределу заключается в том, что мы берем значение этого отношения для Δv, малого по сравнению с нашим масштабом; в фазовом же пространстве, когда мы исходим из абстракции — из движения n материальных точек в трехмерном пространстве и переходим к понятию движения изображающей точки в $6n$-мерном пространстве, мы лишены этого понятия естественного масштаба в фазовом пространстве; косвенным подтверждением этого же обстоятельства является то, что существует предел $\frac{t}{T}$ относительного пребывания системы в данном $\Delta\Gamma$, но, вообще говоря, не существует предел

$$\lim_{\Delta\Gamma\to 0}\left(\frac{t}{T\Delta\Gamma}\right).$$

Таким образом, задание состояния в фазовом пространстве — задание, имеющее смысл, т. е. являющееся результатом опыта, есть задание конечного интервала, задание ячейки.

Мы можем высказывать различные вероятностные утверждения относительно будущего поведения нашей системы, но мы должны считаться с тем, что наше состояние могло произойти (за некоторое определенное время) из целого ряда других состояний (ячеек), и „факт, что наше состояние известно как достигнутое, отправляясь от одного совершенно определенного состояния, образует новое данное, меняющее, вообще говоря, значение вероятностей перехода p_{kl} (Адамар [1]).

Связанная с этим обстоятельством невозможность охватить проблемы классической статистической механики с помощью процессов Маркова допускает еще и следующее выражение: если мы будем, уменьшая ячейки, уточнять задание наших состояний так, чтобы применить нашу вероятностную схему, дающую нам равновероятность наших состояний, то мы лишь в пределе получим требуемую полноту задания состояния, тогда, когда само наше построение сделается противоречивым.

Это противоречие — бесконечное число равновозможных взаимноисключающих случаев — является вероятностным выражением невозможности, в общем случае, построения на основании классической механики (с лежащей в ее основании гипотезой непрерывности, с ее детерминистическими уравнениями) теории случайных величин, удовлетворяющей требованиям „кажущейся эргодичности“.

То, что приведенное толкование не является произвольным, подтверждается также тем, что и в вопросе об излучении черного тела классическая механика приходит к аналогичным трудностям: формула Релея, требующая равномерного распределения энергии между бесконечным числом степеней свободы, с вышеуказанной точки зрения — на языке теории вероятностей — является явно противоречивым утверждением. На это последнее обстоятельство указал академик С. Н. Бернштейн [2].

Можно было надеяться, что аналогично тому, как в вопросе о черном излучении удалось избежать противоречий и сохранить согласие с экспериментом ценой отказа от гипотезы непрерывности, лежащей в основании классической механики и являющейся выражением невозможности точного экспериментального равенства величин, — также и в статистической физике удастся достичь согласия с опытом — введя нужную нам для „кажущейся эргодичности" и H-теоремы картину вероятностей — путем введения квантовых представлений.

Действительно Паули, в 1927 г. показал [3], что можно получить нужное соотношение $A_{mn} = A_{nm}$ для вероятностей перехода из одной области элементарных состояний в другую (из чего у него следует H-теорема), но для этого необходимо ввести произвольное допущение, аналогичное „гипотезе элементарного беспорядка", относительно коэффициентов разложения начальной ψ-функции (существующей, по предположению, до „включения возмущения", за которое принимаются взаимодействия частей системы) по собственным функциям, соответствующим элементарным состояниям той области, из которой совершается переход; вероятность перехода из одной области в другую, определяемая дираковским методом нестационарной теории возмущений, оказывается квадратичной функцией этих коэффициентов и не определяется, таким образом, однозначно одним указанием, что система находится в данной области состояний; определяется средняя вероятность перехода, для которой и существует лишь требуемое равенство $A_{mn} = A_{nm}$, причем предполагается, что в среднем фазы различных коэффициентов независимы, а модули равны.

Таким образом Паули не только делает произвольное допущение „элементарного беспорядка", но и в самом методе определения вероятностей перехода предполагает существование таких микроскопических соотношений, которые при тех макроскопических опытах, которые производятся в статистике, физически не имеют места.

Если рассматривать состояния, определенные микроскопически максимально полно (которым соответствуют ψ-функции), то в первом приближении нестационарной теории возмущений мы получим для вероятности перехода из состояния m в состояние n:

$$P_{mn} = \frac{1}{h^2} \left| \int_0^T (n \mid v \mid m)_t dt \right|^2,$$

где $(n|v|m)$ — соответствующий матричный элемент возмущающей энергии. Эти выражения симметричны относительно m и n, причем в силу полноты квантового описания эти вероятности не зависят от предыдущей истории системы и целиком определяются квантовым состоянием; в этом смысле делаются применимыми предыдущие математические рассуждения (стр. 82—83).

Мы получаем эргодичность (в смысле существования равенства $t = T\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$, причем $\Delta\Gamma$ пропорционален числу содержащихся в нем квантовых состояний — обычное понятие фазового пространства, конечно, теряет смысл) в области, для которой $p_{mn} > 0$; вообще говоря это и есть то, что нам надо, так как в выводе канонического распределения для малой подсистемы (стр. 74—76) мы нигде не использовали того, что наша эргодическая область охватывает весь слой равных энергий (от E до $E + dE$). Величина нашей области скажется лишь на определении температуры через величины, относящиеся к фазовому пространству, и через принадлежащую системе (или почти все время принадлежащую большей подсистеме) энергию. Так, например, для идеального газа, где такое определение температуры известно в явном виде:

$$T = \frac{2}{3}\frac{N}{nR}E$$

(N и R — постоянные Авогадро и Клапейрона, а n — число молекул), а

$$\Pi = \frac{\partial\Phi(E)}{\partial E} CV^n E^{\frac{3n}{2}-1},$$

мы должны получить совпадение нашей эргодической области со всем слоем в фазовом пространстве (от E до $E + dE$).

Получив в квантовом смысле нужные нам свойства эргодичности, мы получаем возможность рассматривать соотношения классической статистики как предельные при $h \to 0$. При этом мы считаем, что каждому квантовому состоянию соответствует объем h^r (r — число степеней свободы). Этот не строгий квантово-механический метод лежит в основании большинства книг по квантовой статистике (например: Иордан, Брюллюен).

При предельном переходе квантовая эргодичность дает для конечных областей кажущуюся классическую эргодичность; энтропия, определенная как логарифм числа квантовых состояний в данной макроскопической области, переходит после прибавления аддитивной постоянной $\log h^r$ (что́ в классическом случае ничего не меняет) в классическую энтропию; а квантовый — коллективистский тип подсчета состояний, при котором за равновероятный — в смысле эргодичности — элемент отсчета берется определенное численное изображение распределения частиц по состояниям (для системы, состоящей из одинаковых частиц), переходит в классический-индивидуалистический, где за равновероятный элемент отсчета берется принадлежность произвольной частицы к произвольному состоянию.

Вообще говоря, переход одного типа статистики в другой дает скачкообразное изменение результатов (смена во времени, скажем, распределения ста элементов по десяти состояниям будет совсем иная), но практически переход будет непрерывным, так как при достаточно малом h число ячеек значительно больше числа частиц (что соответствует тому, что распределения Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака переходят в максвелловское при малых плотностях, т. е. при $\frac{v}{nh^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \gg 1$); следовательно состояниями, где несколько частиц находятся в одной и той же ячейке (фазового пространства одной частицы), можно пренебречь: такие состояния в фазовом пространстве всей системы будут находиться на „диагонали“ между „осями“ соответствующих частиц и будут, очевидно, занимать лишь малую часть общего объема, следовательно во времени они будут мало длительны; пренебрегая этими состояниями, мы получим, что квантовая и классическая статистика дают одинаковый результат в отношении распределения системы (во времени) между физически различными состояниями; классическая статистика указывает лишь иной абсолютный вес, — каждое из физически различных состояний имеет вес $N!$

С этой точки зрения, само собою решается затруднение, логически столь значительное с других точек зрения, связанное с введением множителя $\frac{1}{N!}$ в выражение энтропии, необходимого для того, чтобы величина энтропии сосуда, состоящего из двух частей с одинаковым газом с обеих сторон, не менялась со снятием перегородки. Необходимость этого (что лишь ошибочно, впрочем, можно называть требованием аддитивности) для того, чтобы понятие энтропии имело физический смысл, очевидна.

Изменяя абсолютный вес физически различных распределений в $N!$ раз, что можно сделать произвольно, так как лишь относительный вес имеет смысл, мы получим для энтропии (логарифма числа комплексий, реализующих данное макросостояние) правильную величину. Таким путем можно получить почти все нужные результаты. Поэтому можно думать, что изложенное отражает какую-то существенную черту действительности, тем более что отказ от квантовости (в противоположность к предельному переходу $h \to 0$, что́ является, по существу, переходом к наблюдателю, для которого h мало) приводит ко всем вышеуказанным трудностям. Тем не менее физическое обоснование такой картины совершенно неудовлетворительно, так как говорить о точных микросостояниях и о переходах между ними — без опытов, из констатирующих, — бессмысленно.

После работы Паули (1927) появились работы, основанные на применении строгих квантово-механических методов. Это прежде всего — статья Неймана, появившаяся в 1929 г. [4], и статья Паули и Фирца 1937 г. [5]. Эти работы исходят из замкнутой системы с известным гамильтонианом и с существующей определенной ψ-функции системы и из существования макронаблюдателей, имеющих возможность измерять лишь некоторые средние

значения микроскопических величин системы. Доказывается, что для подавляющего большинства макронаблюдателей, для соответствующим образом определенной энтропии имеет место H-теорема. В работах предполагается отсутствие вырождения относительно энергии и разности энергий. При этом дается полное решение задачи: усреднение, которое делается и здесь, служит лишь для оценки относительного числа нетермодинамических наблюдателей, т. е. макронаблюдателей, для которых не имеет места H-теорема (здесь существенно делаемое Нейманом предположение, что с каждой полной системой собственных функций связана некоторая физическая величина, поддающаяся измерению; это же предположение лежит в основании большинства выводов в его известной книге „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik"). Для каждого же определенного макронаблюдателя задача, по крайней мере принципиально, решена полностью. Существенно лишь, что доказательство в том виде, в котором оно приведено, распространяется лишь на H-теорему, а не на эргодическую гипотезу: система предполагается изменяющейся по уравнению Шредингера; при этом для подавляющего большинства макронаблюдателей (для термодинамических наблюдателей) средние во времени значения макроскопических величин практически равны эргодическому среднему; но в то время, как факт установления теплового равновесия может быть установлен, хотя бы принципиально, единственным измерением, для проверки эргодичности необходим ряд измерений, уже первое из которых лишает нас возможности говорить о наличии прежней ψ-функции системы.

В работе доказывается H-теорема лишь интегрально — в том смысле, что доказывается близость энтропии к равновесной лишь в среднем за большой промежуток времени, хотя принципиально существует возможность определить точный ход изменения энтропии. (В противоположность этому в работе Паули в 1927 г. было доказано, что в данный момент наиболее вероятно возрастание энтропии, т. е. как бы локальная H-теорема).

Существенно, что в работе не показана близость принятого определения энтропии, и той энтропии, с которой мы имеем дело в опыте. Это и естественно, так как в опытах, с которыми имеет дело физическая статистика, ψ-функция не существует. Предположение существования ψ-функции системы, для получения которой необходим максимально полный опыт, является основным недостатком работы.

Первой работой, обратившей внимание на неприемлемость для статистики предположения о существовании ψ-функции, была работа Эльзассера „О квантовых изменениях и роли соотношения неопределенности в статистической механике" [6]. Эльзассер исходил из боровской мысли о разрушающем действии максимально полного измерения, направленного на сложные системы с большим числом степеней свободы.

Отмечая произведенное Паули разделение измерений на две группы, из которых измерения первой группы не изменяют измеряемой системы, но не могут служить для целей статистики как

требующие огромного времени для своего завершения (получения ψ-функции), Эльзассер останавливается на измерениях второй группы, т. е. измерениях возмущающих, таких, что результат повторного измерения не тот же, что и первоначального; к таким измерениям принадлежит, очевидно, измерение положения нашей системы в фазовом пространстве.

При достаточно точном определении положения всех частей системы в конфигурационном пространстве связь между измерительным прибором и частями системы будет сильнее взаимодействия между частями самими по себе; в результате измерения составные части системы получат очень большие средние скорости и система разлетится на множество частей в сравнительно короткий срок после измерения.

На основании этого Эльзассер делает вывод: „... возможность единственного квантово-механического представления системы чистым состоянием и возможность приблизительного сохранения условий, в которых она является образцом данной коллекции, — вообще исключают друг друга“.

Более подробного определения тех условий, при которых система является образцом данной коллекции, кроме того, что понятие статистического ансамбля имеет существенно апостериорный характер, Эльзассер не дает.

В этих условиях описание системы будет производиться при помощи статистических матриц (статистического оператора Неймана). Эльзассер пишет, что результаты измерений не определяют статистического оператора единственным образом; при этом он считает, что выражение оператора Неймана, полученное на основании придания всем чистым состояниям, совместным с данным измерением, одинакового веса, а всем остальным состояниям веса 0, не будет инвариантно в функциональном пространстве и будет зависеть от строения выбранных чистых состояний.

Эльзассер вводит для определения U иной принцип; требует минимума величины $\eta = s_p(U \log U)$, называемой им показателем смешанности (mixture index), причем минимум ищется при дополнительных условиях

$$s_p(A_1U) = a_1; \quad s_p(A_2U) = a_2 \ldots,$$

являющихся записью результатов измерения. Дальше Эльзассер рассматривает некоторые следствия, вытекающие из его вариационного принципа, и пытается связать изменение величины η во времени с H-теоремой.

Мне кажется, что действительное положение вещей во многом не таково, каким оно изображается у Эльзассера. Эльзассер, может быть, и прав, когда он считает, что боровская мысль о том, что „мы несомненно убьем животное, если мы будем пытаться так далеко пойти в исследовании его органов, что захотим определить роль отдельных атомов в его жизненных функциях“ [7], в целом ряде отношений существенна и для статистики. Но Эльзассер не определяет того, что́ значит, что к системе применимы статистические методы рассмотрения (возможность чего уничтожается

определением ψ-функции), и даже более того, в дальнейшем он встает на точку зрения, повидимому этой противоречащую. Между тем, здесь, должно быть, можно пойти дальше. Основное, из чего здесь следует исходить, — это тот безусловный факт, что практически в большинстве случаев люди производят не максимально полные опыты и именно на основании их предсказывают будущее; именно такие опыты и составляют предмет статистики.

Поскольку в таких условиях здесь неприменимы не только абсолютно детерминистические, свойственные классической механике, но и основанные на вполне определенных закономерностях квантовой механики способы определения будущего, постольку это предсказание будущего носит вероятностный характер в том смысле, что мы не можем получить это будущее из заданных начальных условий тем единственно нам известным закономерным путем, который указывается нам квантовой механикой.

Употребленное таким образом понятие вероятности имеет смысл, отличный от того, который оно имеет в квантовой механике, где вероятности определяются на основании записи результатов опыта ψ-функцией совершенно единым дедуктивным путем. Здесь вероятности существенно апостериорны и возникают в каждом данном случае лишь на основании соответствующего опыта; законы бросания костей, законы стрельбы в цель, законы Менделя и т. д. — возникли лишь на основании опыта, и как и все другие применения теории вероятностей, занявшей совершенно центральное место в современной науке, не нуждались для своего развития ни в каком анализе непонятной связи закономерности и вероятности.

При классической картине действительности, когда любое состояние принципиально могло быть определено совершенно точно без всякого возмущения и будущее предсказывалось совершенно детерминистически, неизбежно возникал вопрос о проверке правильности вероятностного предсказания будущего, о совместности вероятностного предсказания и тех или иных начальных условий; а между тем всякое задание последовательности начальных условий для последовательности проверочных опытов уничтожало вероятностную картину, для которой характерно „хаотическое“ распределение результатов, не поддающееся выражению ни в каком алгорифме.

Квантовая механика существенно изменила такое положение вещей: максимально полный опыт не только уничтожает вероятностную картину (здесь „вероятность“ не имеет квантово-механического смысла), но и условия физического эксперимента, ее порождающее; макроскопически заданные условия могут быть так доуточнены до максимально полного опыта, что система будет разрушена или существенно изменена; может быть, это доуточнение удастся (путем соответствующего подбора измеряемой величины, т. е. системы ортогональных функций) сделать так, что макроскопически процесс произойдет так же, как и без этого максимально полного опыта (т. е., воспроизводя макроскопически те же начальные условия, мы сравниваем макроскопические след-

ствия в том случае, когда будет и когда не будет произведен уточняющий опыт: в этой необходимости определять тождества состояний макроскопическим образом заключены главные трудности разбора этого вопроса), — во всяком случае мы должны констатировать, что, вообще говоря, определение ψ-функции изменяет макроскопически заданное протекание процесса и исключает тем вероятностную картину, определенную ранее, а потому нельзя и говорить о проверке вероятностных предположений максимально-полным опытом. (Если для проверки правильности закона распределения отклонений пуль при стрельбе мы определим ψ-функцию всей системы, то мы, должно быть, не только изменим результат стрельбы, но и прекратим сам процесс стрельбы — убьем стрелка, разрушим цель, испортим оружие и т. д.).

Можно говорить лишь о макроскопической проверке (после опыта) правильности вероятностных предположений, а не о „выводе“ их из „наиболее полного описания“, так как его нет; так как наличие вероятностной картины в свою очередь исключает возможность указывать на ψ-функцию; так как, лишь вызвав к жизни соответствующим экспериментом картину максимально полного опыта, мы получаем право на нее ссылаться.

С этой точки зрения можно утверждать (еще раз предупредив, что употребленное здесь понятие вероятности противопоставляется элементарным вероятностям квантовой механики), что картина максимально полного опыта и вероятностная картина дополнительны. Эта дополнительность аналогична до известной степени той дополнительности классической и квантовой картины, о которой говорил Гейзенберг в своей нобелевской речи; классическая физика — познание, исходящее из наших ощущений, связанное с отказом от учета влияния, оказанного наблюдением; квантовая физика — познание, связанное с учетом этого влияния, связанное с отказом от объективизирования элементарных процессов. В предыдущем утверждении вероятностная макроскопическая картина занимает место, аналогичное классической в этой формулировке Гейзенберга, что и понятно, так как вероятностные соотношения служат основанием для макроскопических, статистических утверждений, а термодинамика ведь — классическая дисциплина. При этом на закономерности макроскопической классической механики следует смотреть как на статистические, вероятностные. Кроме того, с этой точки зрения сам собою решается вопрос о соотношении вероятности и причинности — о возможности принципиальной однородности ряда опытов, приводящих к различным результатам.

С этой точки зрения на вероятность нет смысла говорить о вероятности тогда, когда определенным подбором начальных условий можно достичь того или иного результата экспериментальной проверки наших предположений (например, нет смысла говорить о вероятностях различных положений системы в момент t в классическом фазовом пространстве, так как эти положения, изменяющиеся по абсолютно точным детерминистическим, а не статистическим законам, целиком определяются заданием поло-

жений в момент $t=0$); и здесь может быть речь лишь о переходе от одной формулировки заданных нам условий к другой — математически ей эквивалентной, а не об опытном определении данных нам в опыте величин вероятностей.

О вероятностях мы говорим тогда, когда существует макроскопически определимый и воспроизводимый комплекс условий, допускающий возможность, вообще говоря различных, исходов; этот комплекс условий не поддается окончательному определению, но практически люди всегда пользуются существованием таких комплексов условий: практически мы знаем, например, что́ значит бросать кости без обмана, — и для таких условий опыт дал определенные вероятности.

Кроме того, с точки зрения, основанной на том, что по крайней мере при некоторых уточнениях начального немаксимально полного опыта существенная часть получаемых ψ-функций приводит к иному протеканию макроскопически заданного процесса (а лишь с этой точки зрения справедливо все вышеизложенное) — с этой точки зрения — при таких уточняющих возмущающих опытах нельзя прибегать к записи опыта в виде оператора Неймана $U=\sum_i w_i P_{\varphi_i}$, где P_{φ_i} — соответствующие операторы проектирования; истолкование такой записи, например через большой промежуток времени t, гласит: при уточнении начального опыта через время t мы получим с вероятностями w_i те состояния, в которые перешли φ_i, меняясь по уравнению Шредингера, а по условию макроскопически эти состояния отличаются от того, что было бы, если бы уточняющий опыт не был произведен; поэтому неясна точка зрения Эльзассера, который, на ряду с предположением о разрушающем действии на систему уточняющего опыта (повидимому, он считает, что это будет происходить чуть ли не всегда), предлагает записывать неполный опыт оператором Неймана, с соответствующим образом определенными коэффициентами w_i.

Дальше, непонятно утверждение Эльзассера, что придание всем чистым состояниям, совместимым с данным наблюдением, одинакового веса, а остальным — веса 0, приведет к выражению оператора Неймана, неинвариантному в функциональном пространстве, зависящему от строения чистых состояний, — как раз наоборот, выбор всех w_i равными даст:

$$U=\sum_{i=1}^{s} w_i P_{\varphi_i}=\frac{1}{s}\sum_i P_{\varphi_i}=\frac{1}{s}P_M,$$

где M — соответствующее подпространство, имеющее геометрический смысл, независимый от выбора системы фундаментальных функций. Более того, в квантовой механике можно привести ряд соображений в пользу этой равновероятности простых состояний, на существование которой впервые указал академик В. А. Фок.

Представим себе опыт, произведенный над водородным атомом, который дал значение энергии E, квадрата момента количества движения M^2, не равного 0, и проекцию момента количества движения на ось $z : M_z$, причем эта проекция равна 0. Тогда физик, знающий квантовую механику, будет утверждать, что симметрии в плоскости xy, данной нам в опыте и записанной в ψ-функции, которая не зависит от углов φ, — что этой симметрии отвечает действительная симметрия („действительная“ в том смысле, что все дальнейшие опыты не дадут в плоскости xy ни одного выделенного направления). Физик же классической школы будет утверждать, что под кажущейся симметрией, данной в начальном опыте, который хотя и правда не дал нам в плоскости xy выделенного направления, будет скрываться действительная асимметрия в том смысле, что вектор момента количества движения должен быть как-то расположен „в действительности“ и направление его и определяет асимметрию в плоскости xy.

Пусть теперь произведен немаксимально полный опыт, который выделил в функциональном пространстве некоторую конечномерную сферу „подозреваемых“ функций. Здесь нельзя уже, как в предыдущем случае, из симметрии, полученной в опыте, заключить о соответствующей симметрии для всех дальнейших опытов, так как теперь результат опыта не будет максимально полным описанием действительности.

Таким образом, простые соображения симметрии недостаточны для обоснования равновероятности простых состояний.

В курсе лекций, прочитанном в Ленинградском университете в 1936—1937 гг., академик В. А. Фок приводит следующее рассуждение: произведенный немаксимально полный опыт может быть уточнен различными способами, путем измерений, связанных с различными системами ортогональных функций.

Так как математические ожидания величин не должны зависеть от того, в какой из систем мы запишем результаты опыта, то из требования независимости математических ожиданий от унитарной подстановки следует, что все w_i равны друг другу.

Действительно, пусть

$$U = \sum_{i=1}^{S} w_i P_{\psi_i}; \quad U' = \sum_{i=1}^{S} w_i' P_{\psi_i}',$$

где ψ_i и ψ_i', связаны унитарным преобразованием; тогда, если хотя бы в одном из операторов не все w_i равны друг другу (и w_k будет наибольшим), мы получим, что математические ожидания, определяемые U и U', вообще говоря неравны: рассматривая физическую величину, заданную оператором $P\psi_k$, мы получим для ее математического ожидания

$$s_p (UP_{\psi_k}) = (U\psi_k, \ \psi_k) = w_k,$$

а во втором случае

$$s_p (U'P_{\psi_k}) = (U'\psi_{k_1} \psi_k) = \sum_{1}^{S} w_i' (\psi_i'\psi_k)^2 < w_k,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{s} (\psi_i'; \psi_k)^2 = 1,$$

а среди w_i', по условию, нет большего, чем w_k, и наверняка есть меньшие. В этом наиболее общем доказательстве используется то недоказуемое, повидимому, в общем виде допущение, что всякому эрмитовскому оператору с точечным спектром (здесь — всякому оператору проектирования) может быть сопоставлена физическая величина. В частных случаях — смотри, например, следующий далее разбор немаксимально полного опыта для водородного атома — это соответствие может быть установлено.

Для водородного атома приведенные рассуждения принимают следующий вид: пусть определена энергия E и квадрат момента количества движения M^2; тогда математическое ожидание некоторого оператора L не должно зависеть от выбора направления оси z, вдоль которой направлено магнитное поле и произволу в выборе направления которой соответствует произвол в выборе унитарной подстановки, преобразующей Ψ_{nlm} в $\Psi_{nlm'}$ (n, l, m — квантовые числа, соответствующие E, M^2 и M_z).

Действительно, как $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, так и $Y_{lm}(\theta^*, \varphi^*)$, соответствующие другому выбору оси z ($\Psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, но множитель, зависящий от r, несущественен), удовлетворяют уравнению: $\overline{\mathrm{m}}^2 Y_{lm} = h^2 l(l+1) Y_{lm}$; поэтому одни выражаются линейно через другие, а так как они ортогональны и нормированы, то они связаны унитарным преобразованием. Поэтому инвариантными по отношению к унитарной подстановке будут лишь те выражения, которые независимы от выбора оси z.

Записывая оператор Неймана в виде интегрального оператора с ядром

$$\sum_{m=-l}^{m=+l} w_i \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) \overline{\Psi_{n,l,m}}(r', \theta', \varphi'),$$

мы получим, что от выбора унитарного преобразования не должны зависеть величины

$$\sum_{m=-l}^{+l} w_i Y_{lm}(\theta, \varphi) \overline{Y_{lm}}(\theta', \varphi'),$$

но унитарная подстановка имеет лишь один инвариант

$$\sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \varphi) \overline{Y_{lm}}(\theta', \varphi'),$$

т. е. ядро оператора Неймана (отвлекаясь от множителя, зависящего от r), в котором все w_i одинаковы.

В основе приведенных соображений академика В. А. Фока лежат следующие два предположения: во-первых, предполагается, что немаксимально полный опыт дает основания для хотя бы

вероятностных утверждений относительно результатов любых последующих опытов (в частности, отсюда следует существование вероятностей—коэффициентов w_i в операторе Неймана); во-вторых, предполагается, что запись результатов опыта может быть произведена в форме, инвариантной относительно выбора различных систем координат; это значит, что при любом выборе измеряемой при уточняющем опыте величины, т. е. при любом выборе ортогональной системы функции в подпространстве, совместном с результатами начального опыта, запись ожидаемого исхода уточняющих опытов (иначе — запись результатов немаксимально полного опыта) может быть произведена в виде указаний вероятностей различных исходов этих уточняющих опытов, т. е. в виде оператора Неймана.

Ясно, что это второе условие требует гораздо большего, чем просто возможности записать результаты опыта в любой координатной системе: линейная комбинация матриц проектирования может при любых значениях коэффициентов быть записана в любой координатной системе, но лишь в том случае она будет оставаться во всех координатных системах линейной комбинацией матриц проектирования, когда она равна единичной матрице с постоянным множителем.

Как уже было показано, наличие этих двух предпосылок дает возможность доказать, что все w_i равны друг другу. (Очевидно этот результат делается неприменимым, когда возможно бесконечное количество дискретных, следовательно взаимно исключающих, результатов уточняющего опыта.)

С изложенной выше точки зрения на вероятность говорить о существовании коэффициентов w_i в общем случае, независимо от условий эксперимента, нельзя: так, например, подбором начальных условий можно так определить результаты уточняющих опытов, произведенных при данной энергии E и квадрате момента количества движения M^2, что будет получаться всегда лишь одно определенное значение M_z — для этого достаточно, чтобы те экземпляры, на которых проверяются вероятности, были подобраны так, чтобы, кроме данных квантовых чисел n и l, и число m имело фиксированное значение, определенное в ранее произведенном опыте.

Ясно, что это можно сделать лишь в силу того, что начальный опыт был немаксимально полным, — в противном случае никакой „подбор“ ничего не изменит в исходе последующих опытов. Но если существует хотя бы один способ доуточнения, приводящий в случае определенной ψ-функции к макроскопически иному протеканию опыта, чем то, которое мы всегда находим практически (а это основное с точки зрения Эльзассера), — то с той же точки зрения на возникновение вероятностей в случае неполного опыта постулат о существовании данных вероятностей есть постулат об отсутствии — при указанных макроскопических условиях — какого-либо „подбора“, который за указанным макроскопическим заданием состояния скрывал бы все нам портящую ψ-функцию.

Поэтому и предпосылки, дающие возможность получить равновероятность простых состояний, эквивалентны допущению, что в тех макроскопически охарактеризованных и воспроизводимых условиях, в которых производится эксперимент, этот „подбор“ не имеет места; и установление и проверка такого утверждения могут быть произведены лишь на основании опыта — после него.

Необходимо еще отметить, что само понятие „доуточнения“ накладывает жесткие условия на те ψ-функции, которые могут быть получены как результат доуточнения опыта до максимально полного: если начальное состояние было задано макроскопически приближенным заданием начальных условий классической механики, то всякое уточнение, при котором Δx и Δp лежат внутри начальных интервалов и для которого неравенство Гейзенберга переходит в равенство, определит ψ-функцию, дающую приблизительно классическое движение максимумов вероятности; при этом мы не будем иметь при доуточнении состояния иного макроскопически описанного протекания процесса.

Предлагаемая Эльзассером запись неполного опыта неинвариантна относительно выбора различных систем координат, но она дает равновероятность простых состояний в случае, когда опыт указывает лишь на один вырожденный уровень измеряемой величины.

Существенно, что он также не показывает близости принятого им определения энтропии (доказательство H-теоремы, для которой приводится им лишь для превращения двух невзаимодействующих систем во взаимодействующие) к обычно употребляемому в термодинамике.

Итак, повидимому, можно считать, что предложенное Эльзассером применение боровских идей к статистике пока не привело к необходимому в этой области прояснению.

Но вряд ли можно думать, что движение в этом направлении бесполезно, что иные пути уже привели к удовлетворяющим нас результатам.

Мне кажется, — и это мне хотя бы отчасти хотелось показать в данной статье, — что несмотря на многочисленность имеющихся точек зрения мы еще очень далеки от понимания природы самых основных утверждений физической статистики и что следует отказаться от мнимой ясности, будто бы существующей в этой области, и признать до времени непонятность господствующих здесь закономерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adamar, Atti del Congr. del Matem., Bologna, 5, 1929.
2. Бернштейн, Современное состояние теории вероятностей, 1933.
3. Sommerfelds-Festschrift, 1928.
4. ZS. f. Phys., B. 57, 30, 1929.
5. ZS. f. Phys., B. 106, 572, 1937.
6. Phys. Rev., 52, 987, 1937.
7. Naturwiss., 21, 245, 1933.

О СПОСОБАХ ПОЛУЧЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА

(Критические замечания по поводу книг: „Статистическая физика“ Ландау и Лифшица и „Квантовая механика“ Френкеля)

Н. С. Крылов и *Г. Ю. Филипченко*

Обоснование физической статистики — это определение связи основных ее утверждений с основными утверждениями других отделов теоретической физики; это — получение, если возможно, главных ее результатов из принципов механики, механики тех объектов, совокупностями которых статистика занимается; наконец — это выяснение необходимости и роли особых постулатов, лежащих в ее основании.

Основатели физической статистики не получали из классической механики, а постулировали существование механических соотношений, достаточных для выполнения соотношений статистики. Эти постулаты сводились по существу к определенным утверждениям относительно временного ансамбля, характеризующего развитие системы во времени. Необходимость произвольных гипотез была особенно подчеркнута Лоренцом в его лекциях в Collége de France. Таким образом, с этой точки зрения, задача обоснования статистики еще далека от разрешения.

Нам кажется, что нельзя согласиться с авторами „Статистической физики“, [1] которые утверждают, что статистика обоснована не в меньшей степени, чем другие отделы теоретической физики; излагаемый в „Статистической физике“ вывод главных утверждений (если рассматривать этот вывод как претендующий на окончательное решение вопроса) нам кажется неудовлетворительным. В своем, прекрасном во всех других отношениях, курсе статистики Ландау и Лифшиц получают Гиббсово распределение следующим путем (стр. 10): постулируют существование предела доли времени пребывания системы в данном состоянии (это утверждение для изолированной системы можно считать доказанным работами Бирхгоффа, Хинчина и др.) и определяют вид введенной так стационарной функции распределения ρ (стр. 19), пользуясь теоремой Лиувилля, — отсюда авторы получают

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

[1] Ландау и Лифшиц, Статистическая физика, 1938.

Мультипликативность ρ дает, что ρ будет функцией лишь аддитивных интегралов движения. Ссылаясь на то, что таких интегралов лишь семь, авторы приходят к утверждению, что мы вправе считать, что для замкнутой системы $\rho = \text{const}$ для точек, соответствующих данным значениям энергии, импульса и момента, и $\rho = 0$ для всех прочих точек. Кроме этого, доказывается, что статистическое состояние тела, находящегося в заданных внешних условиях, определяется только его энергией, — при этом распределение оказывается микроканоническим. (Это следует не только из примечания на стр. 23, но и из самого вывода распределения Гиббса на стр. 50—51: если бы ρ зависело, кроме энергии, от импульса и момента, то σ в формуле 16,2 и коэффициент A в формуле 16,3 тоже зависели бы от них.) Из микроканонического распределения авторы получают распределение Гиббса.

Следует отметить, что сделанное на стр. 15 утверждение („за достаточно большой промежуток времени выделенная нами подсистема пройдет через все возможные состояния"), которое могло бы рассматриваться как аналог эргодической гипотезы, непосредственно в выводе авторами нигде не используется.

Однако приведенный в книге вывод встречает возражение в следующих отношениях.

Прежде всего в доказательстве соотношения $\frac{d\rho}{dt} = 0$ используются два взаимно исключающие предположения: предположение о том, что изображающие точки движутся в фазовом пространстве по механической траектории (стр. 19 и 21), и предположение о существовании непрерывной в фазовом пространстве $2n$-измерений функции распределения ρ. Первое предположение имеет место в случае изолированной системы, — там допустимо использование теоремы Лиувилля, но даваемые ею результаты (равные объемы, происходящие друг из друга, содержат одни и те же множества изображающих точек) достаточны для доказательства того, что плотность вероятности ρ постоянна вдоль фазовой траектории лишь при предположении непрерывности ρ в $2n$-мерном пространстве: в случае изолированной системы теряет смысл само понятие $2n$-мерной плотности вероятности, и тем более теряет смысл понятие ρ как непрерывной функции интегралов движения (например, типа e^u, где u — интеграл движения), — в этом случае ρ, очевидно, разрывно. Приведенный вывод законен тогда, когда рассматривают, как обычно, непрерывно распределенную плотность вероятности, причем связь этой вероятности с действительной эволюцией системы решается при помощи произвольной гипотезы. Ландау и Лифшиц исходят из наиболее физичного — энштейновского определения вероятности (как предела доли времени пребывания), но при этом в случае изолированного тела они лишаются необходимых условий непрерывности. Эти условия можно надеяться получить при рассмотрении подсистем (именно с них начинают авторы свое рассуждение — см. стр. 18), так как последние в силу воздействия среды могут приобретать значение интегралов движения, отличные от

начальных. Но именно благодаря этому подсистемы не движутся по механической траектории и нет возможности применить теорему Лиувилля, причем, по мере того как создаются эти возможности, теряется возможность рассматривать ρ как непрерывную в $2n$-мерном пространстве функцию.

Далее, приведенный в „Статистической физике" вывод неубедителен еще потому, что в силу определяемости эволюции механической системы начальным ее состоянием определенному состоянию одной части системы соответствует определенное состояние второй части (какие это части, конечно, безразлично), — а не любое состояние второй части. Таким образом, здесь нет той независимости, которая необходима для мультипликативности (формула [5, 2]); при данном состоянии первой подсистемы здесь нет, конечно, усреднения по всем возможным состояниям второй подсистемы, — это был бы произвольный постулат, который вообще ничего не дал бы для рассмотрения эволюции данной системы, а именно об этом и идет речь. Поэтому квазинезависимость совершенно недостаточна. То же имеет место и для двух изолированных систем (к которым приведенный в книге вывод очевидно также вполне применим). По отношению к последним имеет место еще и следующее: нет оснований заключать заранее, что в формуле (5, 2) ρ_1, ρ_2 и $\rho_{1,2}$ имеют одинаковый вид; так, например, если ρ_1 и ρ_2 — микроканонические, эргодические распределения, то $\rho_{1,2}$ таким не будет, так как не могут, например, осуществиться состояния, при которых первая система обладает всей суммарной энергией. Кроме того, даже если считать очевидным, что существует лишь семь аддитивных механических интегралов движения, отождествление рассматриваемого аддитивного интеграла движения с линейной комбинацией этих семи величин уж во всяком случае лишается основания, если заранее не требовать того, чтобы этот интеграл был, как и те семь, непрерывной функцией в фазовом пространстве и имел для всех систем один и тот же вид как функция механических интегралов движения.

Таким образом, лишь ценой столь неубедительных рассуждений удается показать, что при заданных внешних условиях статистическое состояние системы определяется только энергией, т. е. что распределение будет микроканоническим. Авторы не делают вывода об эргодическом характере движения; такой вывод был бы заведомо неправильным (ведь доказательство велось в наиболее общем виде: для всех механических систем использовались лишь уравнения механики); авторы пишут, что хотя в действительности ρ определяется всеми интегралами движения, мы можем заменить ρ на микроканоническое, так как „значения неаддитивных интегралов не оказывают влияния на статистические свойства системы" (стр. 23). Авторы не разъясняют подробнее понятия статистических свойств системы, не пишут, для любых ли величин средние значения определяются лишь значениями аддитивных интегралов движения (в частности, лишь энергией). Так, например, функция ρ, соответствующая микроканоническому

распределению, может быть употреблена для определения временных распределений любых величин лишь для действительно эргодического движения (за рассматриваемые величины можно, например, выбрать характеристические функции областей, — это непосредственно доказывает сказанное). Надо думать, что под статистическими свойствами авторы понимали свойства системы, целиком характеризуемые функцией ρ, причем для изолированных систем было доказано, что ρ можно считать равной постоянной величине для точек, соответствующих данным значениям аддитивных интегралов движения, и равной нулю для всех прочих точек (стр. 23). Но функция ρ была определена (стр. 19) как предел доли времени $\frac{t}{T}$ пребывания системы в данной области фазового пространства, и поэтому такая функция ρ может указанным выше образом зависеть от аддитивных интегралов движения лишь для действительно семикратно импримитивных систем (вообще говоря $n \geqslant 7$). Точно так же ρ определяется только энергией лишь в случае действительно однократно импримитивных, т. е. квазиэргодических систем. То, что ρ сохраняет прежний (определенный на стр. 19) смысл, следует также из предложения: „вероятность нахождения замкнутой системы в различных областях фазового пространства, в которых аддитивные интегралы имеют заданное значение, просто пропорциональна объему этих областей“ (стр. 23). Таким образом, как истолкование смысла функции ρ как доли времени пребывания, так и возможность находить при помощи ρ средние значения любых величин (правда, эта возможность нигде прямо авторами не высказывается) приводят к выводу, что полученный на стр. 23 результат равноценен утверждению действительной семикратной импримитивности или даже эргодичности, которая следует, как уже говорилось, не только из примечания на стр. 23, но и из сути вывода на (стр. 50—51) механических систем. Так как, вообще говоря, механические системы не таковы, то не удивительно, что к полученному на стр. 23 результату удалось притти лишь путем крайне сомнительных рассуждений, о чем уже говорилось.

Полученный результат отчасти связан с общей точкой зрения авторов, высказанной в предисловии: „для обоснования статистики вообще не требуется никаких дополнительных гипотез, кроме принципов механики... Последнее видно, впрочем, и из самого факта верности статистики. Если бы статистика нуждалась для своего обоснования в дополнительных гипотезах, т. е. в утверждениях, справедливых не для всевозможных механических объектов, то она бы не могла быть верной во всех случаях“. (Стр. 5.)

Действительно, никем еще не была доказана необходимость дополнительных гипотез, но во всяком случае ясна необходимость определения границ приложимости статистики, класса объектов, по отношению к которым справедливы выводы статистики: ведь нельзя же утверждать, что для всевозможных механических объектов распределение можно считать микроканоническим или

хотя бы систему считать семикратно-импримитивной; что малая часть всякой механической системы будет иметь по энергии Гиббсово распределение; это очевидно не так, например, для малой части большого ткацкого станка, хотя последний и подчиняется классической механике.

При определении границ области приложимости наиболее общих утверждений статистики существенно, что эта область, не охватывая всех объектов, для которых справедлива классическая механика, включает в себя системы, требующие применения квантовой механики (квантовые статистики), что, повидимому, заставляет думать, что природа статистических закономерностей во всех случаях одна и та же.

При всем вышеизложенном необходимо иметь в виду, что — как и для всякой задачи обоснования уже существующего отдела теоретической физики — правильность конечного результата рассуждения не является оправданием, если само рассуждение не удовлетворяет требованиям если и не математической строгости (это, конечно, не необходимо), то логической ясности и непротиворечивости. Именно с этой точки зрения, нам кажется, и вызывают возражения рассматриваемые рассуждения авторов „Статистической физики“.

Кроме вышеуказанного, можно еще отметить некоторую неясность в определении энтропии, а главное — доказательства H-теоремы. Сначала (стр. 24) энтропия определена как логарифм области своего фазового пространства, в которой система практически всегда находится, т. е. как логарифм области, соответствующей данному макроскопическому состоянию. Из формулы 6,1 следует, что $\Delta\Gamma$ является $2n$-мерной областью; также для подсистемы с числом степеней свободы k $\sigma = \ln \Delta\Gamma_i$, где $\Delta\Gamma_i$ $2k$-мерная область. Однако в выводе на стр. 50—51 $\Delta\Gamma'$ имеет число измерений, равное не $2(n-k)$ (k — число степеней свободы рассматриваемой малой подсистемы так, что $d\Gamma$ $2k$-мерный элемент объема), а $2(n-k)-1$, т. е. это не гиперобласть, а гиперповерхность. Действительно, $\Delta\Gamma' \cdot d\Gamma$ имеют число измерений $2n-1$, так как лишь слой dE равных энергий (величины $\Delta\Gamma'\, d\Gamma\, dE$) имеет число измерений $2n$, а включить dE в $\Delta\Gamma'$ нельзя, так как тогда $\sigma' \to -\infty$ (при $dE \to 0$). Таким образом, авторы не могут пользоваться единым определением энтропии (это обстоятельство, повидимому, естественно в классической статистике). Причина невозможности проведения единого определения энтропии заключается в том, что по формуле 6,1 в $\Delta\Gamma$ входят точки, которые в действительности не могут реализоваться (в силу зависимости подсистем); это приводит к рассмотрению $2n$-мерной области вместо $(2n-1)$-мерной поверхности, а это уже качественная разница, сказывающаяся всякий раз, когда от общего определения энтропии по формулам 6,6 и 6,1 необходимо перейти к вычислению объемов действительно реализуемых (тем или иным состоянием системы) областей фазового пространства.

Но особенно непонятно приведенное в „Статистической физике“ доказательство H-теоремы. Доказательство исходит из того,

что в начальный момент существует соотношение $\rho = \prod_i \rho_i$ (соответствующее соотношению 6,1; о трудностях, здесь существующих, мы уже говорили—стр. 4 и стр. 8). Система, меняясь по уравнениям механики, дает к моменту времени t' функцию ρ, которая уже неравна произведению ρ_i'. Используя для момента t' определение энтропии как суммы энтропий частей и пользуясь тем, что ρ' совпадает с ρ, авторы получают $\sigma' \geqslant \sigma$. Приведенное доказательство основано на отказе от определения функции ρ_i как $\lim_{T \to \infty} \frac{t}{T}$ (такая функция ρ_i при данных начальных условиях может быть лишь одна); здесь вводится, повидимому, понятие ρ_i для данного макросостояния — понятие, нигде не определенное; но лишь оно дает возможность считать, что ρ_i', вообще говоря, отлично от ρ_i; в то же время используемое в выводе совпадение ρ и ρ' противоречит этому в виду 7,1. Наконец, не доказывается, а предполагается основное для доказательства утверждение, что $\rho_i \neq \prod_i \rho_i'$, хотя $\rho = \prod_i \rho_i$.

Из других, более мелких по своему значению, недостатков, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой области, можно отметить аналогичные предыдущему неясности в следующих вопросах: в введении $N!$ (на стр. 71) и в методе Больцмана (стр. 77), неясности в выводе распределения Гаусса (стр. 110—111) и в выводе распределения Гиббса для систем с переменным числом частиц.

Другой распространенный учебник, содержащий непосредственный вывод Гиббсова распределения, т. е. вывод без введения дополнительных гипотез,—это „Волновая механика", ч. 1, Я. И. Френкеля. В главе пятой „Волновой механики" содержится следующий вывод канонического распределения: рассматриваются две слабо взаимодействующие системы a и b, образующие вместе замкнутую систему, так что $E_{\alpha'} + E_{\beta'} = E_{\alpha''}'' + E_{\beta''}$ (формула 124). Системы a и b описываются волновыми функциями ψ_a и ψ_b — соответственно; комбинированная система описывается произведением $\psi_{ab} = \psi_a \psi_b$, причем, если $|C_{\alpha'}|^2$ — относительная вероятность того, что система a находится в состоянии α', а $|C_{\beta'}|^2$—соответствующая вероятность для системы b и состояния β', то $|C_{\alpha'\beta'}|^2 = |C_{\alpha'}|^2 |C_{\alpha'}|^2$—вероятность обнаружить одновременно a в состоянии α' и b в состоянии β'. Из равенства числа переходов между состояниями $(\alpha'\beta')$ и $(\alpha''\beta'')$ в обоих направлениях следует: $|C_{\alpha'}|^2 |C_{\beta'}|^2 = |C_{\alpha''}|^2 |C_{\beta''}|^2$ (формула 124а), откуда при помощи формулы 124 получается:

$$|C|^2 = Ae^{-\frac{E_\alpha}{\theta}} \quad \text{и} \quad |C_\beta|^2 = Ae^{-\frac{E_\beta}{\theta}}$$

Этот вывод лишь внешне квантовомеханический; по существу это совершенно общий вывод. Основное в нем—это предположение о мультипликативности описывающих состояние функций, т. е. допущение возможности находить вероятности состояний общей системы путем умножения вероятностей состояний состав-

ных частей. Само это допущение требует доказательства, и даже не может быть доказано в общем виде. Даже более того, именно для приведенного в книге рассуждения это допущение незаконно: нельзя считать независимыми в отношении распределения по энергиям две системы, сумма энергий которых постоянна во времени (формула 124). (Слабость взаимодействий, очевидно, ничего при этом не меняет.) Неправильность такого допущения видна также и из противоречивости конечного результата — Гиббсово распределение для обеих дополнительных частей замкнутой системы: мы можем, например, определять вероятность состояний, при которых $E_\alpha = E_\beta = \frac{E}{2}$; числа комплексий, реализирующих состояние с энергией, равной $\frac{E}{2}$, для первой и второй частей общей системы, вообще говоря, неравны; между тем в силу равенства 124 тогда, когда первая часть будет обладать энергией, равной $E_\alpha = \frac{E}{2}$, вторая часть также будет обладать энергией $E_\beta = \frac{E}{2}$. По таким же соображениям нельзя признать удовлетворительным вывод Гиббсова распределения для систем с переменным числом частиц.

Для задачи обоснования физической статистики существенно, что одно из наиболее убедительных и трудно оспариваемых утверждений, то, что статистические свойства системы определяются взаимодействием системы с окружающей ее средой, — совершенно еще не развито в сколько-нибудь стройную теорию; существенно то, что почти все имеющиеся результаты достигнуты в конце концов через сведение задачи к задаче изолированного тела. Поэтому до сих пор ссылки на роль среды как на окончательное „обоснование“ статистики являются попытками удить рыбу в мутной воде взаимодействия системы и среды. До сих пор неясна связь статистических закономерностей с основами механики частиц, совокупностями которых статистика занимается, и, следовательно, неясен критерий ее применимости к различным системам, т. е. неясны границы ее применимости; а пока это так, статистическая физика будет занимать особое место среди других отделов теоретической физики и являться в этом смысле наименее обоснованным ее отделом.

О „МАКРОСКОПИЧЕСКОМ" ПОЛУЧЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА

Г. Ю. Филипченко

Так как для полной статистики (дающей для любой величины распределение по времени, зависящее от начальных условий, лишь через энергию тела) эргодичность не только достаточна, но и необходима (что можно показать), а сама эргодичность может и не иметь места, то при попытке обосновать статистику не пользуясь эргодичностью, можно надеяться получить статистику, дающую верные результаты не для любых величин. При этом можно получить разные статистики, пригодные для разных групп величин. Я пытался построить статистику, пригодную для вычисления временных распределений макроскопических величин. Такая статистика дала бы все необходимые для термодинамики результаты. Основная трудность заключается в вопросе: действительно ли существует группа макроскопических величин? (Макроскопическими я называю те величины, которые могут быть прямо или косвенно измерены в каком-либо макроскопическом опыте.) Может случиться, что в макроскопическом опыте мы можем измерить все импульсы и координаты тела, и в этом случае никакой группы макроскопических величин не будет. Однако, и не давая строгого доказательства существования группы макровеличин, можно утверждать, что такая группа существует, ибо очевидно, что наши макроскопические — термодинамические опыты над телами не могут дать нам сведений об импульсах и координатах всех атомов тела.

Из существования группы макровеличин вытекает одно важное ее свойство. Если все макровеличины могут быть представлены как функции n макровеличин $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ $(n \leqslant 2N)$, где N — число степеней свободы тела, то скорости изменения этих величин, которые в свою очередь суть макровеличины, могут быть представлены как функции начальных значений макровеличин: $\dot{\varphi}_k = f(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$. Из этого следует, что зная макросостояние тела (значение всех макровеличин) в данный момент, мы можем предсказать их значения в любой следующий момент. Высказанное положение вполне согласуется с опытом: действительно, все процессы в природе протекают вполне закономерно даже с точки зрения макроскопического наблюдателя, за исключением тех редких нарушений макрозаконов, которые мы называем флюктуациями.

Учитывая возможность флюктуаций, мы должны сказать, что по данному макросостоянию тела можно с подавляющей вероятностью предсказать будущее макросостояние тела.

В пространстве фаз тела макросостояние изобразится областью, все точки которой изображают макросостояние с одинаковыми значениями макровеличин. Положим, что из макросостояния (*1*) тело переходит (почти всегда) в макросостояние (*2*). При этом все точки области, изображающей (*1*), должны перейти в точки области, изображающей (*2*); другими словами, область, в которую переходит при движении область (*1*) и объем которой равен объему области (*1*), должна целиком уложиться в область (*2*). Это возможно лишь в том случае, если объем (*1*) меньше объема (*2*) или равен ему

$$\Delta\Gamma_1 \leqslant \Delta\Gamma_2.$$

Рассматривая возникновение состояния (*2*), мы приходим к выводу, что либо все объемы областей переходящих друг в друга состояний равны, либо $\Delta\Gamma_1 \ll \Delta\Gamma_2$. Назовем, как обычно, $\lg \Delta\Gamma = S$ энтропией.

Мы получили: если энтропия является макроскопической величиной (если она как-либо зависит от макросостояния), то с подавляющей вероятностью переход происходит из состояния с меньшей энтропией в состояние с большей энтропией. Полученный результат совпадает, кажется, с H-теоремой, которую мы получили как следствие того, что дальнейшим наблюдением во времени нельзя уточнить начальное макросостояние.

Прежде чем подойти к временному распределению для макровеличин, надо установить между нашими макросостояниями возможные переходы. Переходы возможны, очевидно, между теми макросостояниями, в которых все интегралы движения, зависящие от макровеличин, будут иметь одно и то же значение. Мы знаем только три макроскопически определимых интеграла движения: энергию, количество движения и момент количества движения. Можно, пожалуй, думать, что неаддитивные интегралы не могут быть макроопределимыми, ибо макровеличины относятся не к частям тела (при перестановке молекул тела они не меняются), а к местам пространства, и лишь при суммировании— безразлично, суммировать ли по частям тела или по местам пространства. Часть пространства фаз, определенную постоянным значением макроопределенных интегралов движения, назовем эргодической поверхностью.

Нам надо теперь найти временное распределение для макровеличин, т. е. определить предел доли времени, которую система проводит в данном макросостоянии (а изображающая систему точка пребывает в области, изображающей макросостояние в пространстве фаз). Такой предел существует для любой области пространства фаз и зависит от того, по какой механической траектории движется изображающая систему точка, — зависит от интегралов движения, определяющих эту траекторию. Но доля времени пребывания системы в макросостоянии есть макроскопи-

чески наблюдаемая величина, а значит из всех интегралов она может зависеть лишь от макроинтегралов, т. е. для всех траекторий эргодической поверхности предел доли времени пребывания имеет для данного макросостояния одно и то же значение. В том случае, когда объем эргодического слоя конечен, можно показать, что этот предел пропорционален объему области макросостояния.

I. Если есть две области в пространстве фаз (*1*) и (*2*) такие, что пределы долей времени пребывания для них равны

$$\lim \frac{t_1}{T} = \lim \frac{t_2}{T},$$

если вычислять их по определенным n траекториям (n — все равно, конечно или нет), то их объемы $\Delta\Gamma_1$ и $\Delta\Gamma_2$ можно выровнять обрезанием от них областей, для которых $\lim \frac{t_1'}{T} = 0$, $\lim \frac{t_2'}{T} = 0$ по всем нашим траекториям.

Через (*1*) и (*2*) проходят одни и те же траектории, и, значит, (*1*) может при движении частично совпасть с (*2*). Выбросим их общую часть, и мы получим две области, удовлетворяющие снова условиям теоремы. Так мы можем продолжать, пока не получим двух областей (*1'*) и (*2'*), для которых $\lim \frac{t}{T} = 0$ по всем нашим траекториям. Мы получили их обрезанием от (*1*) и (*2*) равных кусков (то, что (*1*) много раз смещалось, — неважно, ибо объем при этом не меняется). (*1*) и (*2*) могут быть выровнены отрезанием области, из которой возникает при движении (*1'*) и (*2'*).

II. Если для (*1*) и (*2*) $\lim \frac{t}{T}$ равны по всем траекториям эргодической поверхности, то, чтобы их выровнять, надо отрезать для них области, для которых $\lim \frac{t}{T} = 0$ по всем траекториям эргодической поверхности. Покажем, что объем таких областей равен нулю. Для этого рассмотрим область точек, которые могут возникнуть за то или иное время при движении из точек нашей области. Если эта область конечна (а она не может быть больше эргодического слоя), то для нее $\lim \frac{t}{T} = 0$ по любой траектории, ибо она есть сумма конечного числа частей, из которых каждая может быть получена при движении из нашей начальной области и, потому имеет $\lim \frac{t}{T} = 0$.

Но, с другой стороны, наша область такова, что ни одна траектория за ее пределы не выходит, а значит для нее $\lim \frac{t}{T} = 1$. Это значит, что область, имеющая $\lim \frac{t}{T} = 0$ по всем траекториям конечного эргодического слоя, не может иметь конечных размеров.

Итак, если для двух областей $\lim \frac{t}{T}$ по всем траекториям

равны, то и объемы их равны. Если $\lim \frac{t}{T}$ у одной в два раза больше, чем у другой, то она может быть разбита на две части так, что у обеих $\lim \frac{t}{T}$ равен $\lim \frac{t}{T}$ второй области и, значит, объем первой области в два раза больше объема второй. И вообще

$$\frac{\lim \frac{t_1}{T}}{\lim \frac{t_2}{T}} = \frac{\Delta\Gamma_1}{\Delta\Gamma_2}; \qquad \lim \frac{t_1}{T} = \frac{\Delta\Gamma_1}{\Gamma_{\text{эрг}}},$$

где $\Gamma_{\text{эрг}}$ — объем всего эргодического слоя. Области макросостояний как раз имеют одни и те же пределы по всем траекториям эргодического слоя, и для них должно выполняться написанное равенство. Предел доли времени пребывания пропорционален объему области макросостояния, и средние по времени значения макровеличин можно вычислять как средние по эргодическому слою. Полученный результат справедлив, разумеется, не для всех, а лишь для макроскопических величин.

К ВОПРОСУ О ПОГЛОЩЕНИИ β-ЛУЧЕЙ В МАТЕРИИ[1]

Б. И. Стыро

ВВЕДЕНИЕ

Потеря энергии заряженной частицы, движущейся в материи, происходит в результате ее взаимодействия с атомами этой материи, главным образом с периферическими электронами атома. Это взаимодействие сводится либо к частичной или полной отдаче энергии движущейся частицы периферическому электрону, чтó вызывает ионизацию или возбуждение атома, либо к отклонению движущейся частицы, излому ее пути, чтó приводит к рассеянию пучка частиц, не сказываясь на изменении ее скорости.

При скоростях, не очень близких к скорости света, столкновения β-частиц с ядрами материи практически можно рассматривать как „упругие", не сопровождающиеся потерей энергии частицы, что ведет также к рассеянию первоначального пучка частиц.

Таким образом, коэффициент поглощения β-лучей μ (размерность его $см^{-1}$) в материи может быть представлен формулой:

$$\mu = \mu_n + \mu_p, \quad (1)$$

где μ_n характеризует потерю энергии частицы, а μ_p потерю частиц в пучке.

Интенсивность потока пучка параллельных лучей I при прохождении слоя материи толщиной dx, как известно, убывает на величину

$$dI = -\mu I dx,$$

что приводит к экспотенциальному закону поглощения:

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \quad (2)$$

Формула (2) описывает поглощение однородного потока энергии.

---

[1] Частичное участие в эксперименте принимали студент ЛГУ А. Акимов (ионизационный метод) и аспирант ГГО С. Баранов (метод счетчика Гейгера—Мюллера) во время прохождения им практикума в Геофизической лаборатории ЛГУ под руководством автора.

Далее, из общих соображений можно полагать, что поглощение неоднородного β-пучка происходит по закону:

$$I = \sum_i I_{0_i} e^{-\mu_i x}.$$

Однако заранее сказать, чему должно равняться здесь i, не представляется возможным.

Экспериментальные данные, относящиеся к поглощению β-лучей, чрезвычайно противоречивы. Так, В. Вильсон [1] (W. Wilson), изучавший однородный пучок β-лучей, устанавливает линейный закон поглощения β-лучей в алюминии. Кроузер [1] (Krouser) получил ряд меняющихся закономерностей с возрастанием толщины фильтра: отсутствие поглощения при очень тонком слое, линейную и, наконец, показательную зависимость с увеличением толщины абсорбента.

Исследования, произведенные Мозели (H. G. I. Moseley) и другими авторами [2] над поглощением неоднородного β-потока фильтрами, также не дают возможности указать общую закономерность явления. В частности А. Г. Граммаков, Н. П. Староватов и П. Н. Тверской, изучавшие поглощение неоднородного потока β-лучей в провощенной бумаге, устанавливают закономерность, выражающуюся суммой двух показательных функций:

$$I = I_{0_1} e^{-\mu_1 x} + I_{0_2} e^{-\mu_2 x}. \qquad (3)$$

Правда, ими не вносилась поправка на влияние γ-лучей, а, как мы увидим в дальнейшем, это влияние значительно.

Учитывая неоднородность полученных ранее результатов, представлялось интересным разобраться в этом вопросе и в первую очередь в негомогенном потоке радиоактивных излучений, выделить отдельно γ- и β-компоненты и получить величину коэффициента поглощения последнего.

Урановые и ториевые семейства содержат неодинаковые количества β- и γ-излучающих веществ. Так, в урановом семействе присутствуют четыре интенсивных β-излучателя UX_2, RaB, RaC, RaE и лишь один интенсивный γ-излучатель RaC, в то время как в ториевом семействе присутствуют лишь три интенсивных β-излучателя MsTh$_2$, ThB, ThC, но зато два интенсивных γ-излучателя MsTh$_2$ и ThC. Поэтому законы поглощения суммарного β- и γ-излучения для ториевых и урановых семейств излучателей должны отличаться друг от друга. Это обстоятельство было использовано рядом авторов для определения отношения $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Th}}$ в смесях.

Гревен [3] (Gräven) для этой цели применил стеклянные и гипсовые фильтры. Им был получен для гипсовых фильтров 3,5 мм толщиной урановый эквивалент ториевого препарата [1] в 5,6 раза больше, чем урановый эквивалент ториевого препа-

[1] Урановым эквивалентом ториевого препарата называется отношение ионизационных токов в приборе, вызываемых урановым и ториевым препаратами.

рата при отсутствии фильтров. Для стеклянных фильтров толщиной 1,4 мм результат оказался равным 3,7. В металлических фильтрах Гревен подобного эффекта не обнаружил; поэтому им был сделан вывод о непригодности их для определения отношения $\frac{U}{Th}$.

Изменения уранового эквивалента ториевого препарата Гревен объяснил наличием сильного вторичного β-излучения, вызываемого первичными γ-лучами в веществе гипсовых и стеклянных фильтров.

Гуммель [4] (Hummel) пользовался алюминиевым счетчиком Гейгера—Мюллера с толщиной стенок 1 мм, что не давало ему возможности полностью использовать β-излучение. Он пользовался цилиндрическими свинцовыми фильтрами (толщина стенок 1 мм) и получил при увеличении толщины фильтров от 0 до 3—5 мм увеличения уранового эквивалента на 60%.

Г. В. Горшков и Н. П. Старобатов [3] в своей работе применяли бумажные, гипсовые, алюминиевые и стеклянные фильтры. Ими было показано, что величина уранового эквивалента ториевого препарата не зависит от материала фильтра и при всех фильтрах имеет значение в 2,6 раза большее, чем при отсутствии фильтров. В противоположность Гревену, им удалось показать, что на ионизацию в камере не влияют вторичные процессы, вызываемые γ-лучами, а различие в урановом эквиваленте ториевых и урановых препаратов возникает благодаря количественному различию в их β- и γ-излучениях.

Нам казалось интересным еще раз проверить данные, полученные Г. В. Горшковым и Н. П. Старобатовым в части, не совпадающей с результатами Гревена. Поэтому в своем исследовании нами были избраны в качестве поглощателей металлические свинцовые фильтры.

АППАРАТУРА

В настоящей работе применялись следующие две установки:

I. Нами была использована методика, разработанная А. Г. Граммаковым, Н. П. Старобатовым и П. Н. Тверским, которая также применялась Е. В. Горшковым и Н. П. Старобатовым.

В качестве ионизационной камеры была избрана камера от полевого универсального прибора (емкость 4 л, диаметр 22,5 см, высота 13,5 см). Внутренним электродом камеры служил латунный стержень 14,1 см длиною и 0,3 см в диаметре.

Для исключения возможности проникновения в камеру α-частиц и эманаций основание ее было заклеено двойным слоем провощенной бумаги толщиной 60 μ. Измерительным прибором служил двунитный электрометр Вульфа. Электростатическая емкость прибора, измеренная по методу Гармса, оказалась равной 4,1 см. Чувствительность шкалы — 1,25 V на одно деление. Натуральное рассеяние прибора составляло 0,1 — 0,2 делений в минуту.

Прибор устанавливался на четырехугольный деревянный ящик с выпиленным наверху круглым отверстием, диаметром 20,2 см. Руда, измельченная в порошок, насыпалась на круглую тарелочку диаметром 10—11 см, ставилась на дно ящика и по мере необходимости сверху покрывалась фильтрами. Слой препарата каждый раз насыпался таким, чтобы была достигнута так называемая „толщина насыщенного слоя". Под „толщиной насыщенного слоя" подразумевается такой слой препарата, начиная с которого его дальнейшее увеличение не сказывается на увеличении ионизационного тока, вызываемого β-лучами в камере. Как показали исследования А. Г. Граммакова, Н. П. Староватова и П. Н. Тверского, это насыщение для руд различной плотности достигается приблизительно при слое толщиной 3—5 мм препарата. Поэтому нами каждый раз брался слой препарата, превышающий указанную величину.

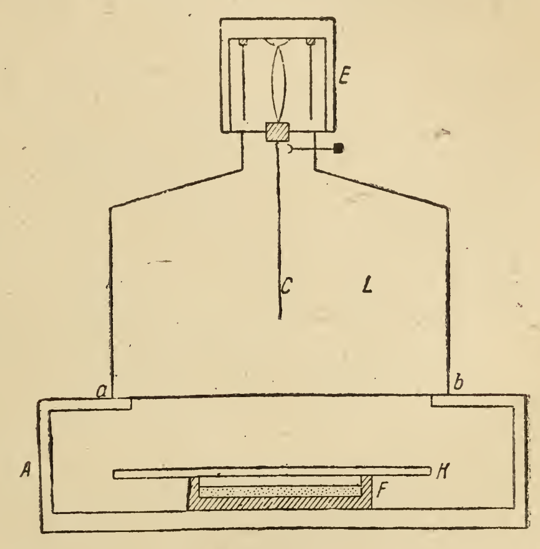


Рис. I.

Прибор схематически изображен на рис. I, где E — электрометр, C — внутренний электрод; L — ионизационная камера, A — деревянный ящик, K — фильтры и F — тарелочка с препаратом.

II. Вторая установка схематически изображена на рис. II. Здесь C — счетчик Гейгера—Мюллера, $Ф$ — фильтры и P — тарелочка с насыпанной на нее радиоактивной рудой.

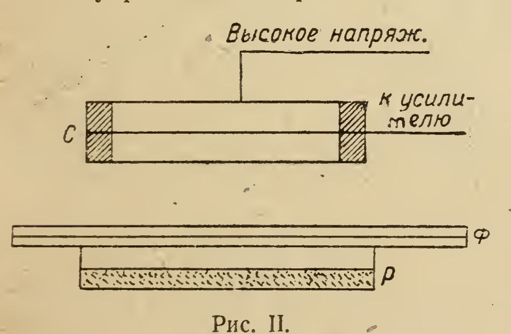


Рис. II.

В качестве счетчика нами был выбран алюминиевый счетчик с толщиной стенок 0,03 см, длиной 10 см и диаметром 1 см. Источником высокого напряжения служила выпрямительная установка со стабилизатором Медикуса. В качестве усилителя был взят трехветвенный, трехкаскадный усилитель типа Джонсона, состоящий из двенадцати ламп. В данной работе мы пользовались одной ветвью усилителя. Регистрация импульсов производилась электромагнитным реле со стрелочным указателем. Счетчик устанавливался, во

избежание посторонних влияний, в заземленном металлическом ящике. Руда насыпалась в четырехугольную тарелочку размерами $12 \times 6 \times 0{,}5$ см. Тарелочка ставилась прямо под счетчиком, на расстоянии от последнего в 12 см и при исследовании сверху покрывалась фильтрами. Во избежание проникновения эманации в ящик тарелочка с препаратом плотно обвертывалась двойным слоем провощенной бумаги. Во время эксперимента счетчик работал очень стабильно, сохраняя все время почти постоянный натуральный фон. Рабочая характеристика счетчика приведена на рис. III.

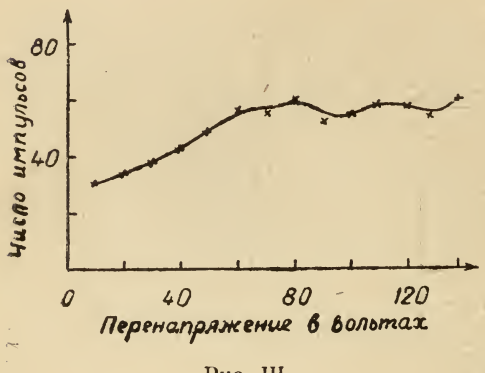


Рис. III.

Разрешающая способность всей установки изучалась следующим образом. Прямо против счетчика на расстоянии от него 3,6 м помещалась ампула, содержащая 1 мг радия, и принималось, что при данных условиях все импульсы, проходящие счетчик, регистрируются. Затем ампула помещалась в ряде точек на меньших расстояниях (до 0,5 м) от счетчика, и каждый раз измерялось количество просчитанных импульсов. Полученные результаты сравнивались с числом их, вычисленным в предположении, что последнее возрастает по закону обратных квадратов расстояния. Вычисление производилось по формуле:

$$n_k = n_0 \frac{r_0^2}{r_k^2},$$

где n_0 — число импульсов с препаратом, помещенным на расстоянии r_0, при котором мы считаем разрешающую способность установки за 100%, а n_k — число импульсов в минуту при r_k. Результаты измерения приведены на рис. IV, где по оси абсцисс нанесено количество действительно просчитанных счетчиком импульсов в минуту, а по оси ординат — процент этих импульсов по отношению к прошедшим наш счетчик. При использовании этой кривой во все дальнейшие измерения вносились соответствующие поправки на просчеты.

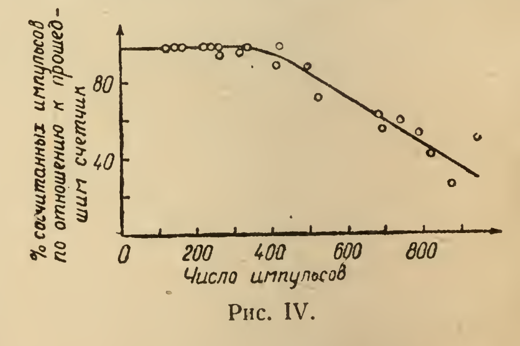


Рис. IV.

В качестве излучающих препаратов была взята активная руда с концентрацией 1,8%, 5% 10% U_3O_8, а также азотнокислый торий ($ThNO_3$), возраст которого точно не был известен, но препарат был достаточно стар, с мезоторием, близким к равновесию.

В качестве фильтров была использована провощенная бумага, толщиной 0,003 см и металлическая бумага толщиной 0,0017 см: сплав из 89,92% свинца и 10,18% олова.

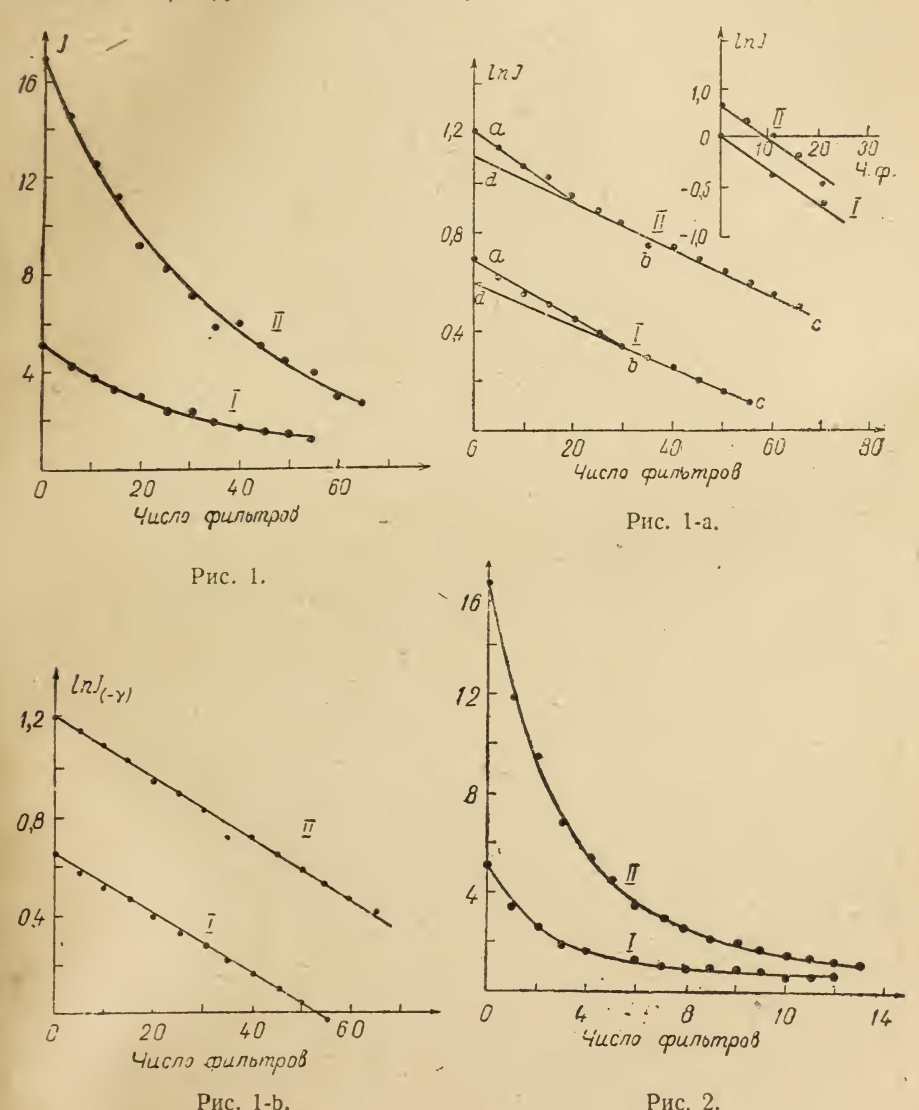


Рис. 1.

Рис. 1-a.

Рис. 1-b.

Рис. 2.

КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ

Коэффициент поглощения измерялся следующим образом. Тарелочка с насыпанной в нее радиоактивной рудой сверху покрывалась слоем фильтра той или иной толщины, после чего измерялся ток в ионизационной камере или регистрировались импульсы механическим счетчиком.

Данные, полученные с помощью ионизационной камеры, приведены в табл. 1 и 2 и на рис. 1 и 2.

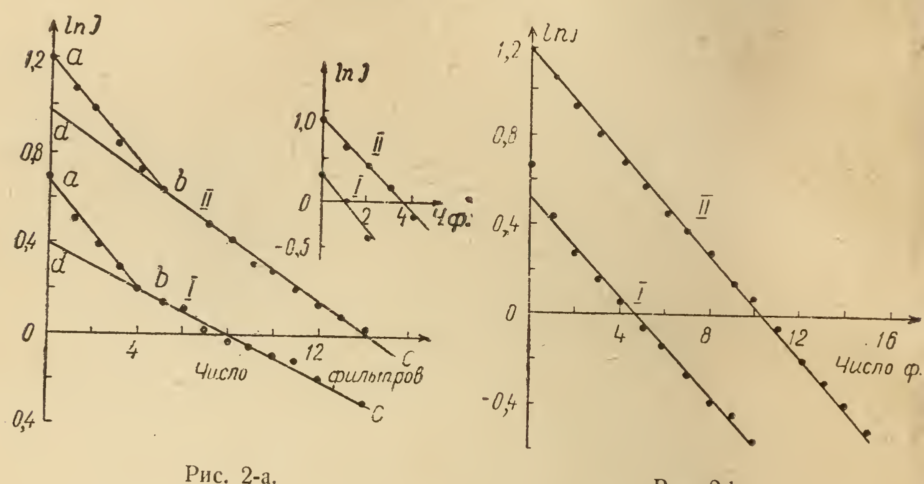


Рис. 2-а. Рис. 2-b.

ТАБЛИЦА 1

Урановая руда с концентрацией 1,8% и 10%. Расстояние от препарата до фильтра 0,6 см. Препарат с концентрацией 1,8% U_3O_8: диаметр излучающей поверхности 11 см; вес — 250 г; толщина слоя препарата 1,9 см; расстояние от препарата до камеры 4,1 см. Препарат с 10% содержанием U_3O_8: диаметр излучающей поверхности 10 см; вес — 62 г; расстояние от препарата до камеры 5 см, толщина слоя препарата 0,6 см. Бумажный фильтр. Влияние γ-лучей соответственно: 0,42 и 0,7 деления в минуту.

Число фильтров	U_3O_8 — 1,8%			U_3O_8 — 10%		
	I	$I_{(-\gamma)}$	Коэфф. поглощения в см$^{-1}$	I	$I_{(-\gamma)}$	Коэфф. поглощения в см$^{-1}$
0	5,02	4,6	$\mu_1 = 6,8$	16,80	16,10	$\mu_1 = 7,8$
5	4,28	3,86	$\mu_2 = 31,0$	14,47	13,77	$\mu_2 = 28,3$
10	3,64	3,22	$\mu = 9,7$	12,50	11,80	$\mu = 9,5$
15	3,34	2,92		11,07	10,37	
20	2,88	2,46		9,10	8,40	
25	2,50	2,08		8,25	7,55	
30	2,26	1,84		7,30	6,60	
35	2,02	1,60		5,71	5,01	
40	1,85	1,43		4,80	5,10	
45	1,43	1,21		5,11	4,41	
50	1,49	1,07		4,50	3,80	
55	1,34	0,92		4,00	3,30	
60				3,58	2,88	
65				3,19	2,49	

Данные, полученные во второй серии опытов, где применялся метод счетчика Гейгера—Мюллера, приведены в табл. 3 и 4 и на рис. 3 и 4.

ТАБЛИЦА 2

Те же данные, что и в табл. 1. Свинцовый фильтр. Фон γ-лучей и вторичных процессов для руды 1,8% U_3O_8 — 0,5 деления в минуту, для руды 10% U_3O_8 — 0,7 деления в минуту.

Число фильтров	U_3O_8 — 1,8%			U_3O_8 — 10%		
	I	$I_{(-\gamma)}$	Коэфф. поглощения в $см^{-1}$	I	$I(-\gamma)$	Коэфф. поглощения в $см^{-1}$
0	5,02	4,52	$\mu_1 = 73,3$	16,8	16,1	
1	4,28	2,70	$\mu_2 = 415,3$	11,87	11,70	$\mu_1 = 92,6$
2	3,64	1,87	$\mu = 150,1$	9,37	8,64	$\mu_2 = 312,1$
3	3,34	1,45		6,67	5,97	$\mu = 151,3$
4	2,88	1,15		5,27	4,57	
5	2,50	0,87		4,27	3,57	
6	2,26	0,76		3,52	2,82	
7	2,02	0,53		3,07	2,37	
8	1,85	0,41		2,61	1,91	
9	0,87	0,37		2,02	1,32	
10	0,77	0,27		1,87	1,17	
11	0,77	—		1,63	0,93	
12	0,57	—		1,34	0,64	
13	0,58	—		1,17	0,47	
14	0,51	—		1,08	0,38	
15	—	—		0,96	0,26	
16	—	—		0,8	—	

ТАБЛИЦА 3

Источник 50 г, руды с 5% концентрацией U_3O_8. Напряжение на счетчике 1200 V, давление в счетчике 58 мм Hg. Абсорбатор — вощеная бумага. Фон γ-лучей — 55 импульсов в минуту. Натуральный фон — 45 импульсов в минуту.

Число фильтров	N	$N(-\gamma)$	Коэфф. поглощения в $см^{-1}$
0	1443	1388	$\mu_1 = 6,6$
10	1051	996	$\mu_2 = 27,3$
20	855	800	$\mu = 9,8$
30	593	538	
40	462	407	
50	354	299	
60	270	215	
70	233	178	
80	179	124	
90	159	104	
100	130	75	

Наблюдаемый непосредственно в электрометре эффект ионизации и число импульсов, отсчитанных по счетчику, являются результатом взаимодействия β- и γ-лучей. Рис. 1—4, а также логарифмические графики 1а—4а характеризуют этот эффект.

ТАБЛИЦА 4

Те же данные, что в табл. 3. Влияние γ-лучей и вторичных эффектов для урано-радиевой руды — 60 импульсов, а для ториевой — 187 импульсов в минуту. Свинцовый фильтр. Натуральный фон 55 импульсов в минуту.

Число фильтров	Руда с 5% концентрацией U_3O_8			Руда Th_2NO_3		
	N	$N_{(-\gamma)}$	коэфф. поглощения в см$^{-1}$	N	$N_{(-\gamma)}$	коэфф. поглощения в см$^{-1}$
0	1785	1725	$\mu_1 = 66{,}0$ $\mu_2 = 290{,}2$ $\mu = 148{,}1$	1615	1428	$\mu_1 = 27{,}3$ $\mu_2 = 180{,}0$ $\mu = 149{,}0$
2	940	880		1100	913	
4	583	523		729	542	
6	373	313		500	313	
8	261	201		401	214	
10	198	138		294	107	
12	160	100		252	65	
14	122	82		233	46	
16	98	38		214	27	
18	69	9		203	16	
20	45	—		190	3	
22	54	—		185	—	
24	42	—		189	—	
26	60	—		—	—	

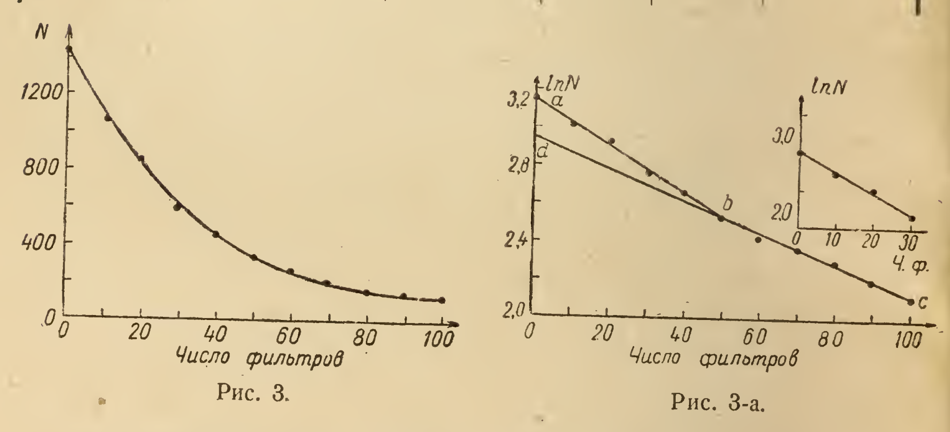


Рис. 3. Рис. 3-а.

Для оценки влияния γ-импульсов на изучаемое явление число фильтров нами увеличивалось до тех пор, пока дальнейшее их увеличение не сказывалось на изменении тока ионизации в электрометре или числа импульсов в счетчике. Этот остаточный ток принимался нами за величину, вызываемую γ-лучами. Для того чтобы убедиться в том, что вторичные эффекты, вызываемые γ-лучами, не влияют на получаемый результат, в настоящей работе измерялись ионизационный ток в электрометре и количество импульсов в счетчике от препарата, покрытого алюминиевыми фильтрами толщиной 2,5 мм и латунными фильтрами толщиной 2 мм, заведомо исключавшими возможность проникновения основной массы β-излучения, и каждый раз, в пределах точности опыта, получался один и тот же результат. Это давало возможность с уверенностью говорить о том, что вторичные эффекты суще-

ственной роли при изучении процессов поглощения не играют, и считать полученные величины ионизации и числа импульсов величинами, характеризующими действия γ-лучей на измерительные приборы. Вычитая эффект γ-лучей из общей суммарной ионизации и числа импульсов, соответственно получаем эффект, обусловленный чистыми β-лучами. Эти данные помещены в таблицах 1—4, в столбцах $I_{(-\gamma)}$ и $N_{(-\gamma)}$, а соответствующие логарифмические графики даны на рис. 1b—4b.

Рис. 3-b.

Вычисления значений коэффициентов поглощения производились по графикам логарифмической зависимости I или N от X. На рис. 1a—4a, которые относятся к суммарному воздействию γ- и β-лучей, заметен излом логарифмической кривой. Поэтому сначала вычислялся коэффициент μ_1 более жесткого излучения из прямой DBC, а затем из общего ионизационного тока вычитался ток, вызываемый жесткой компонентой; его величина находилась из той же прямой и вновь строился график зависимости I от X для оставшейся более мягкой компоненты, и находился другой коэффициент μ_2.

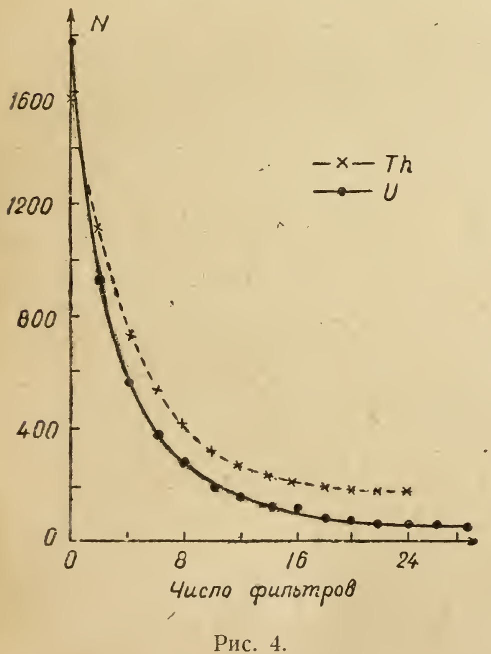


Рис. 4.

Таким образом, общую картину ионизации мы можем характеризовать суммой двух показательных функций:

$$I = I_{01}\,e^{-\mu_1 x} + I_{02}e^{-\mu_2 x}, \quad (4)$$

где μ_1 и μ_2 — соответственно коэффициенты поглощения жесткой и мягкой компоненты, а I_{01} и I_{02} — вызываемый ими эффект при $x = 0$.

Этот результат полностью совпадает с данными А. Г. Граммакова, Н. П. Староватова и П. Н. Тверского (формула 3). Однако, если учесть влияние, вызываемое γ-лучами породы на эксперимент, то картина существенно меняется, как это видно из рис. 1b—4b, на которых по оси ординат отложены $\ln I_{(-\gamma)}$, а по оси абсцисс X. Зависимость между $\ln I_{(-\gamma)}$ и X получается линейная, т. е. закон

поглощения негомогенного пучка β-лучей в бумажных и свинцовых фильтрах характеризуется одной показательной функцией, соответственно формуле (1):

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \qquad (5)$$

Если сравнить коэффициенты поглощения μ_1 и μ_2 для суммарного потока (см. табл. 5), то получается порядковое совпадение их величин для одинаковых руд различной концентрации и различные значения для Th и U.

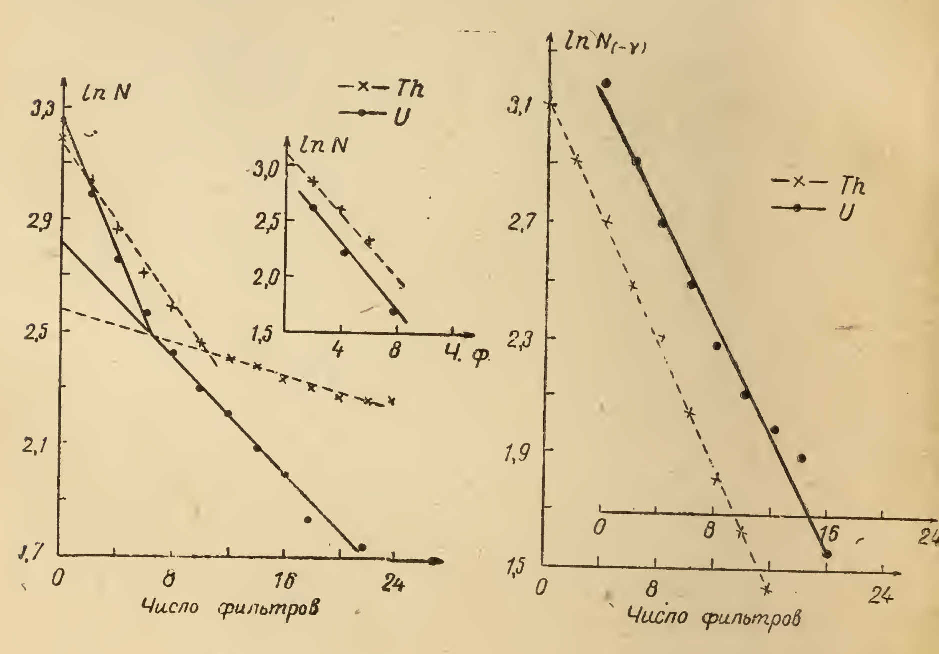


Рис. 4-а. Рис. 4-b.

ТАБЛИЦА 5

Метод измерения	Препарат	Бумажный фильтр			Свинцовый фильтр		
		μ_1	μ_2	μ	μ_1	μ_2	μ
Электростатический . . .	1,8% U_3O_8 10 % U_3O_8	6,8 7,8	31,0 28,3	9,7 9,5	73,3 92,6	415,3 312,1	150,1 151,3
Счетчик Гейгера—Мюллера	5% U_3O_8 $ThNO_3$	6,6 —	27,3 —	9,8 —	66,0 27,3	290,0 180,0	148,1 149,0

Отсутствие совпадений величин коэффициентов μ_1 и μ_2 при измерениях с различными концентрациями активных руд может быть объяснено тем, что нами брались различные толщины излучающего препарата. Так, препарат с концентрацией 1,8% U_3O_8 был насыпан толщиной в 1,6 см, и, следовательно, относительное γ-из-

лучение этого препарата было интенсивнее, чем препарата с концентрацией 10% U_3O_8, насыпанного слоем 0,6 см.

Увеличение интенсивности γ-излучения должно выразиться в перемещении излома логарифмической прямой (рис. 1а—4а) влево, что влечет за собой уменьшение коэффициента μ_1 и увеличение коэффициента μ_2. Сравнение коэффициентов в табл. 5 подтверждает сказанное.

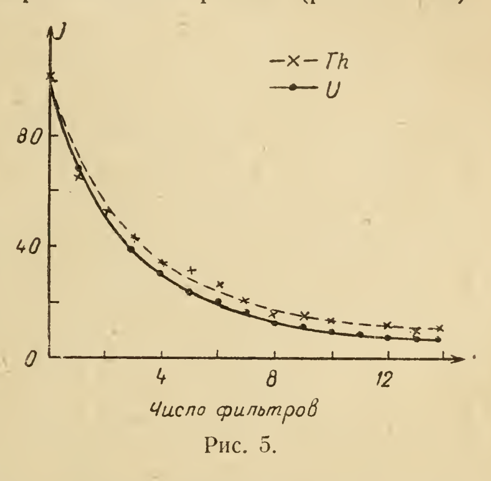


Рис. 5.

Сравнение коэффициентов поглощения μ отфильтрованных β-лучей показывает полное совпадение их величин не только для уранового препарата с разной концентрацией урана, но и U- и Th-препаратов. Это обстоятельство не вызывает возражений, если вспомнить, что основная масса излучаемых радиоактивными препаратами ядерных β-лучей дает непрерывный спектр энергии.

Таким образом, коэффициент поглощения β-лучей в провощенной бумаге равен $\mu = 9{,}65$ см$^{-1}$, и в свинцовом фильтре оказывается равным $\mu = 149{,}6$ см$^{-1}$.

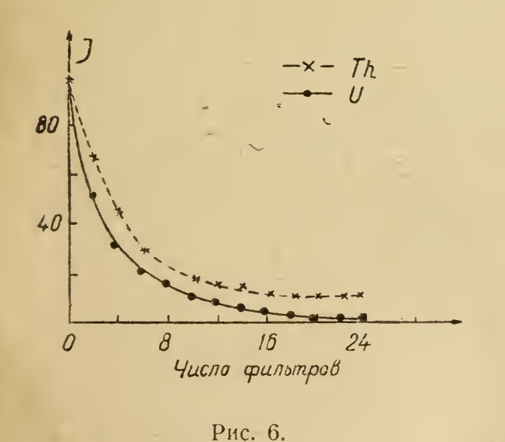


Рис. 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО СОДЕРЖАНИЯ U и Th В ПРЕПАРАТАХ

При определении относительного содержания U и Th в препаратах нами производились измерения ионизационных токов в камере, обусловленных урановым и ториевым препаратами при различном количестве свинцовых фильтров. Эти данные приведены в табл. 6 и на рис. 5, где по оси абсцисс отложено число фильтров, а по оси ординат — ионизационный ток в относительных единицах, а именно была принята начальная величина ионизации за 100 как для уранового препарата, так и для Th и соответствующим образом вычислены все последующие ее значения.

Далее, в табл. 7 и на рис. 6 приведены результаты измерений произведенных с помощью электронной счетной трубки.

ТАБЛИЦА 6

Руда — 10% концентрации U_3O_8 и азотнокислый торий ($ThNO_3$). Диаметр излучающей поверхности 10 см, вес препарата — 62 г каждый. Расстояние от препарата до камеры — 0,5 см. Расстояние от препарата до фильтров — 0,5 см, толщина препарата ~ 0,6 см.

Число фильтров	Th: *I*-делен. шкалы электрометра	Th: *I*-относительн. единицы	U: *I*-делен. шкалы электрометра	U: *I*-относительн. единицы	Th/U
0	9,2	100	16,8	100	1
1	6,0	65,2	11,4	67,8	1
2	4,8	52,2	8,8	52,3	1
3	4,0	43,5	6,6	39,2	1,1
4	3,1	33,7	6,1	30,4	1,1
5	2,8	30,4	4,2	25,0	1,2
6	2,4	26,1	3,5	20,8	1,2
7	1,9	20,7	2,9	17,2	1,2
8	1,4	15,2	2,4	14,2	1,1
9	1,3	14,1	2,0	11,9	1,2
10	1,3	14,1	1,8	10,7	1,3
11	1,2	13,0	1,5	8,9	1,4
12	1,1	12,0	1,3	7,9	1,5
13	0,9	9,8	1,1	6,6	1,5
14	1,1	10,9	1,1	6,6	1,6

ТАБЛИЦА 7

Руда с 5% концентрацией U_3O_8 и азотнокислый Th. Размеры тарелочки, в которую насыпалась излучающая руда: 12 × 6 × 0,5 см. Расстояние от препарата до счетчика 12 см.

Число фильтров	Th: Число импульсов в минуту	Th: Относит. единицы	U: Число импульсов в минуту	U: Относит. единицы	Th/U
1	1615	100	1785	100	1
2	1095	67,7	920	51,6	1,3
4	729	45,1	563	31,6	1,4
6	500	30,9	378	21,2	1,4
8	401	24,9	261	15,2	1,6
10	204	18,2	198	11,1	1,7
12	252	15,5	160	9,0	1,7
14	233	14,4	122	6,8	2,1
16	214	13,2	98	5,5	2,4
18	203	12,6	69	3,9	3,3
20	190	11,7	45	2,5	4,6
22	185	11,4	54	2,9	4,0
24	189	11,7	43	2,4	4,9

Из приведенных таблиц и кривых видно, что исследованный материал дает четкую картину разделения Th и U кривых. Урановый эквивалент ториевого препарата плавно увеличивается по мере увеличения толщины фильтров. Наибольшей величины урановый эквивалент ториевого препарата достигает при 22—24 фильтрах и равен ~ 4,5. Полученные здесь результаты находятся

в согласии с данными Г. В. Горшкова и Н. П. Староватова: определение отношения $\frac{U}{Th}$ в смесях возможно, фильтруя β- и γ-излучения металлическими (свинцовыми) фильтрами.

Для практического нахождения процентного содержания U и Th в веществе необходимо проделать два измерения излучения препарата: одно при отсутствии фильтра, другое при заданной его толщине.

Вычисления относительного содержания в смеси U и Th можно производить следующим образом. Кривая поглощения, построенная в относительных единицах для смеси U и Th, на графике пройдет между эталонными кривыми Th и U. Пусть излучения, прошедшие данный фильтр, и измеренные нами, будут: для чистого урана — U, для чистого тория — T и для смеси — I. Допустим далее, что наша смесь состоит из a_1 частей урана и a_2 частей тория, тогда

$$a_1 + a_2 = 1. \tag{6}$$

Ионизационный ток I создается суммой ториевой и урановой частей смеси; поэтому

$$I = a_1 U + a_2 T. \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) можем найти:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{I - T}{U - T}; \\ a_2 &= \frac{I - U}{T - U}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Величина I измеряется непосредственно, U и T находятся из эталонных кривых при соответствующей толщине фильтра. Другой способ вычисления отношения U к Th можно найти у Боте [5] (Bothe).

Ошибка определения относительного содержания U и Th в смеси целиком зависит от точности определения I. Но при стабильно работающей установке, а в особенности при работе со счетчиком Гейгера—Мюллера могут быть получены хорошие результаты.

ИТОГИ

Кратко формулируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. Поглощение негомогенного пучка β- и γ-лучей в веществе фильтра происходит по простому показательному закону и выражается формулой:

$$I = \sum_k I_{ok} e^{-\mu_k x},$$

причем в первом приближении k мы можем положить равным 2.

2. Поглощение негомогенного потока β-лучей следует простому показательному закону и выражается одной показательной функцией:

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

3. Коэффициент поглощения μ для β-лучей для бумажных провощенных фильтров равен 9,65 см$^{-1}$, а для свинцовых — 149,6 см$^{-1}$ и оказывается одинаковым для исследованных активных излучателей.

4. Определение относительного содержания Th и U в радиоактивных препаратах, представляющих смеси U и Th-руд, возможно путем фильтрации β- и γ-излучения.

5. Для этой цели вполне пригодны металлические свинцовые фильтры.

6. В этом отношении наши данные согласны с результатами Г. В. Горшкова и Н. П. Староватова и находятся в противоречии с выводами Гревена. Урановый эквивалент ториевого препарата возникает благодаря количественному различию в β- и γ-излучениях U и Th-препаратов.

7. Урановый эквивалент ториевого препарата для свинцовых фильтров достигает величины ∼4,5.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. П. Н. Тверскому за просмотр настоящей статьи и сделанные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Граммаков, Н. П. Староватов и П. Н. Тверской, К методике определения радиоактивности по ионизационному эффекту β-излучения. „Журнал Геофизики“, VI, 487, 1936.

2. Kohlrausch, Handbuch d. Experiment. Physik, B. 25, 1928.

3. Г. В. Горшков и Н. П. Староватов, Определение отношения $\frac{\text{Th}}{\text{U}}$ в рудах по β- и γ-лучам. „Журнал Геофизики“, VII, 333, 1937.

4. I. Hummel, Strahlentherapie, Bd. 4, S. 154.

5. W. Bothe, Zts. für Physik, 24, 10, 1924.

ВЛИЯНИЕ ВЛАЖНОСТИ НА РАБОТУ СЧЕТЧИКА ГЕЙГЕРА—МЮЛЛЕРА

И. М. Долгин

I

Вопрос о влиянии влажности на работу счетчика Гейгера—Мюллера до сих пор специально не изучался, и в литературе этот вопрос не освещен. Изучение влияния влажности на работу счетчика становится особо актуальным в связи с тем, что в настоящее время счетчики Гейгера—Мюллера начинают с успехом применяться для регистрации слабых интенсивностей света как ультрафиолетового, так и видимого. Для записи слабых интенсивностей ультрафиолетового света, наблюдаемого на вершинах гор, желательно применять открытые счетчики, чтобы избежать поглощения в кварце, флюорите и т. п. При работе с открытыми счетчиками в них будет проникать влага из атмосферы. Поэтому изучение характера работы счетчика, наполненного влажным воздухом, приобретает важное значение.

II

Цель моей работы заключалась в том, чтобы выяснить, работает ли счетчик Г—М вообще при наличии большого количества влаги в нем; если результат окажется положительным, — то исследовать, как влияет влажность на работу счетчика Г—М.

В начале опыта я исследовал работу счетной трубки Г—М, наполненной сухим воздухом. Результаты измерений этой серии наблюдения графически изображены на рис. 1.

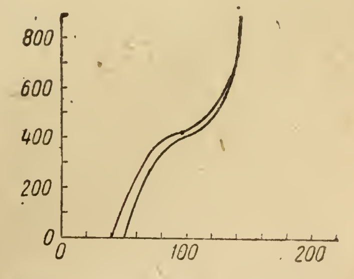


Рис. 1. Счетчик наполнен сухим воздухом.

По абсциссе нанесено напряжение в вольтах V, по ординате — число отсчетов N, которые были получены в одну минуту.[1]

[1] По оси абсцисс нанесено добавочное напряжение сверх постоянного высокого напряжения на счетчике (порядка одной тысячи вольт).

Кривые *2* и *3*, полученные при наличии вблизи установки радиоактивного вещества, дают вполне ясную картину, достаточно характеризующую работу счетной трубки в данных условиях. Из графика на рис. 1 следует, что счетная область начинается при 40—50 V, величина счетной области достигает 70—80 V, рабочий интервал счетной трубки равен 35—40 V.

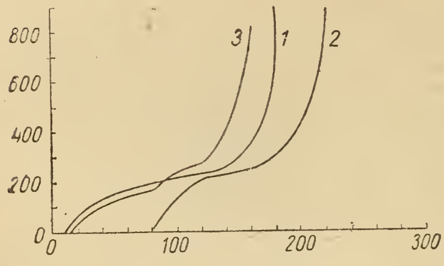


Рис. 2. Счетчик наполнен комнатным воздухом с содержанием паров воды.

Как первая серия наблюдений, так и последующие проводились при одном и том же давлении в счетчике, равном 17 мм Hg. Затем я наполнил счетчик комнатным воздухом с содержанием влаги: относительная влажность 55%, абсолютная влажность 8,1 мм Hg. В этом случае результаты получились совершенно иные. Как видно из соответствующего графика второй серии наблюдений (рис. 2, кривые *2* и *3*), счетная область увеличилась на 60 V по сравнению с первым случаем; рабочий интервал достиг величины 80 V.

Увеличение содержания водяных паров в комнатном воздухе, которым я наполнял счетчик, не вызвало дальнейшего изменения характеристики счетной трубки.

Полученная кривая *1* рис. 2, соответствующая данным: относительная влажность 70%, абсолютная влажность 9,1 мм Hg — аналогична кривой *3* того же рисунка.

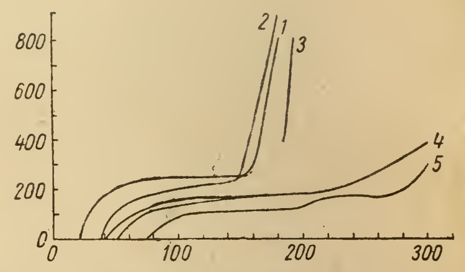


Рис. 3. Счетчик наполнен смесью сухого воздуха с парами воды (кривая *3*). Пары воды в нагретом счетчике (кривая *4* и *5*).

Третью серию наблюдений я производил, когда счетчик был наполнен смесью из сухого воздуха и паров воды, причем процент паров был на много увеличен. К 13 мм Hg сухого воздуха я добавил 4 мм Hg водяных паров (для создания чистых паров и образования смеси была сконструирована специальная установка). Такое увеличение влаги уже вызвало дальнейшее увеличение счетной области на 10 V, а также увеличение рабочего интервала на 5 V. Этому случаю соответствует кривая *1* рис. 3.

Оттого, что счетчик наполнялся смесью из комнатного воздуха при давлении 13 мм Hg и водяных паров при давлении 4 мм Hg, характеристика счетной трубки, как видно из рис. 3, кривая *2*, вовсе не изменилась по сравнению с тем случаем, когда счетчик был наполнен смесью, состоящей из 4 мм Hg водяных паров и 13 мм Hg сухого воздуха. Такого результата и следовало ожи-

дать, так как комнатный воздух при давлении 17 мм Hg, $t^\circ = 20^\circ$ C содержит около одной сороковой мм Hg водяных паров. Прибавление к 4 мм Hg еще $\frac{1}{40}$ мм Hg не могло вызвать существенных изменений в работе счетчика.

В противоположность утверждениям, что счетчик Гейгера—Мюллера при наличии в нем влажности не считает, наблюдался безукоризненный счет. Следовательно, принципиально счет в счетчике, наполненном комнатным воздухом, который содержит пары воды, вполне возможен. Дальнейшие исследования показали, что счет возможен не только во влажном воздухе, но и в том случае, когда счетчик наполнен почти чистыми парами воды. При помощи специальной установки (о которой я упоминал) я наполнил счетчик парами воды. Работа счетчика в этих условиях совершенно не изменилась по сравнению с предыдущими условиями.

Кривая *3* рис. 3 совершенно аналогична с кривыми *1* и *2* того же рисунка.

Больше, чем на 70 V, увеличились счетная область и рабочий интервал, когда счетчик, в котором содержались пары воды, был нагрет до 38° C в специальной электрической печке, могущей в течение нескольких часов сохранять постоянную температуру: кривые *4* и *5* рис. 3 интерпретируют изменения в работе счетчика, вызванные повышением температуры.

Л. Р. Струзер исследовал влияние температуры на работу счетной трубки. Он выяснил, что повышение температуры вызывает смещение начального напряжения, увеличение счетной области и рабочего интервала. Последнее совпадает с моими результатами. В моем опыте не наблюдалось смещения начального напряжения, но с этим считаться нельзя, так как мною была исследована только одна температурная точка.

А. Трост [1] тщательно исследовал работу счетных трубок, наполненных смесью из аргона и паров спирта (алкоголя). Результаты А. Троста аналогичны моим результатам. Трост также получил достаточное увеличение счетной области и рабочего интервала; он наблюдал, что в таких условиях начальное напряжение смещалось вверх по мере увеличения количества паров спирта в смеси с аргоном.

III

В итоге можно указать, что:

1) Счетчик, наполненный комнатным воздухом, который содержит пары воды в пределах парциального давления, при счете дает увеличение счетной области и рабочего интервала, и в этих условиях счетчик вполне пригоден для нормальных измерений.

2) Дальнейшее увеличение количества паров при данном давлении в счетчике не вызывает заметного изменения рабочего интервала.

3) Пары воды вызывают понижение чувствительности счетчика на радиоактивные вещества. Это явление можно объяснить умень-

шением ионизационной способности смеси воздуха с парами воды.

Г. В. Горшкову выражаю благодарность за исключительное внимание, оказанное мне при проведении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Trost, ZS. f. Phys., 105, 399, 1937; Phys. ZS., 36, 801, 1935.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ДАННЫЕ О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РАБОТУ СЧЕТЧИКА ГЕЙГЕРА—МЮЛЛЕРА.

Л. Р. Струзер

Все работавшие со счетчиком Гейгера—Мюллера, встречались с фактом зависимости работы счетчика от температуры. Однако сколько-нибудь систематически никто этого вопроса не исследовал. Имевшиеся до сих пор в литературе сведения сходятся в большинстве случаев лишь в том, что начальное напряжение счетчика растет с ростом температуры. Объяснения температурному эффекту до сих пор также не дано.

Я в своей работе поставил перед собой задачу заснять характеристики счетчика при разных температурах, захватив по возможности большой интервал температур. Мне удалось провести измерения при температурах 16, 40, 70, 80 и 100°. Счетчик, которым я пользовался, был заполнен аргоном при давлении 90 мм Hg и парами спирта при давлении 10 мм Hg. Размеры его были таковы: длина $l = 85$ мм, внутренний радиус цилиндра $r = 10$ мм, радиус нити $r_i = 0{,}15$ мм; цилиндр — латунный, нить — стальная. Счетчик был запаян в стекло. Изоляторы — янтарные. Схема включения обычная. Регистрация импульсов проводилась механическим нумератором с помощью усилителя. Этот последний был собран по схеме Джонсона для счета тройных совпадений, причем использовалась лишь одна его ветвь. Источником высокого напряжения служил кенотронный выпрямитель со стабилизатором Медикуса.

ХОД ЭКСПЕРИМЕНТА

Счетчик в течение двух часов прогревался в термостате. Затем снималась характеристика счетчика, т. е. кривая зависимости числа отсчетов N в минуту от поданного на счетчик напряжения. Измерялась сначала характеристика при наличии ампулки с 0,3 мг Ra, лежавшей на совершенно определенном во все время опытов месте, а затем определялась чувствительность всей установки по методу Вольца [4] и, наконец, снимался натуральный фон. В один и тот же день измерения производились по одному разу для данной температуры. В день удавалось снять кривые для двух-трех разных температур. На другой день эти же измерения повторялись с тем, чтобы каждая из температур была исследо-

вана не менее двух раз. Особенно тщательно снимались характеристики счетчика при температурах 40 и 60°. Полученные в результате измерений кривые надлежит проанализировать.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 1 представлены кривые зависимости числа импульсов в минуту N от напряжения, подаваемого на счетчик при разных температурах. Сплошные кривые — при наличии радия, пунктирные — натуральный фон. Кривые *1, 2, 3, 4, 5* получены при температурах 17, 40, 60, 80 и 100° соответственно. Нуль шкалы оси абсцисс совпадает со значением высокого напряжения 1100 ± 50 V. При рассмотрении кривых сразу можно обнаружить следующие закономерности.

1. Удлинение рабочего интервала

Наш счетчик при нормальной температуре (15—17°) не обладал, как это видно из кривой *1*, хорошими счетными свойствами. Его рабочий интервал невелик (около 40 V), а главное — нет ясно выраженного горизонтального рабочего интервала. При повышении температуры вся счетная область резко расширяется, и в особенности расширяется рабочий интервал. Это удлинение рабочего интервала удалось проследить до конца лишь для температур 40 и 60°. При дальнейшем нагревании он становился столь широк, что его концы заснять уже не удавалось. Для характеристики приводим числовые данные.

ТАБЛИЦА 1

Температура (°C)	17		40		60
Длина рабоч. интервала (V)	40		85		300
В % к значению при 17°	100		212		750
Температ. коэффициент расширения рабоч. интервала $\left(\frac{V}{°C}\right)$		5		27	

2. Увеличение начального напряжения V_{AS} с ростом температуры T

Этот факт неуклонно наблюдался во все время опытов, причем, как показывает таблица 2, рост V_{AS} с температурой тем быстрее, чем выше температура.

ТАБЛИЦА 2

T в °C	17		40		60		80		100
V_{AS} в V	70		170		260		380		560
Коэффициент $\frac{V_{AS_{i+1}}+V_{AS_i}}{T_{i+1}-T_i}$ в $\frac{V}{°C}$		4,3		4,5		6		9	

Реакция на радий остается приблизительно неизменной. Однако в течение опыта разрешающая способность установки постепенно падала. Я склонен этот факт отнести скорее за счет усилителя, чем за счет счетчика.

За время опытов замечен был некоторый „гистерезис“ в ходе зависимости счетных свойств счетчика от температуры. Так, например, после проведения измерений при 60°, когда начальное напряжение было на 190V больше своего нормального значения при температуре 17°, счетчик был оставлен для остывания. Через 1 час его начальное напряжение было на 80V больше нормального, через 2 часа — на 40V, через 4 часа — на 20V. После нагрева до 100° и последующего остывания в течение 12 часов начальное напряжение все же оказалось на 30V выше нормального. К сожалению, отсутствие точного электростатического вольтметра не позволяет мне ручаться за то, что напряжение источника все время оставалось неизменным, но наличие гистерезиса несомненно установлено. Нельзя лишь ручаться за количественную сторону явления.

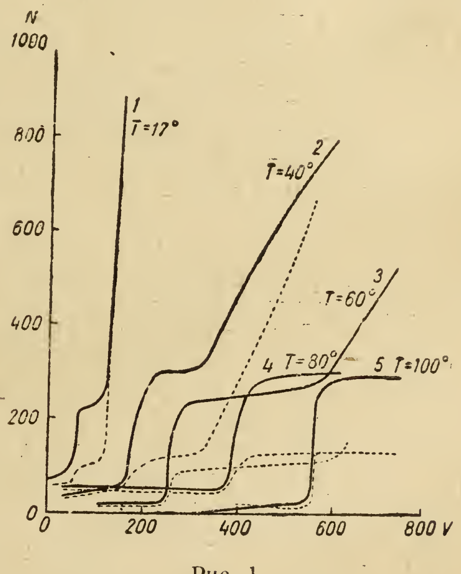


Рис. 1.

Необходимо остановиться еще на одном факте, который как-либо объяснять еще рано, так как не удалось с достаточной достоверностью установить причины и условия его наступления: после продолжительного прогревания (около 6—7 часов) при температурах 80 и 100° резко падала реакция на радий. Число отсчетов падало почти до значения натурального фона, и невозможно было заметить никакой счетной области. После „отдыха“ в течение 12—24 часов при нормальной температуре счетные свойства счетчика опять становились нормальными.

ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЧИНЫ ТЕМПЕРАТУРНОГО ЭФФЕКТА

Для разбора этого вопроса следует учесть все имеющиеся до сих пор экспериментальные факты, но так как опыты велись недостаточно систематично, то и результаты разных авторов трудно сравнить между собой. Интересующихся отсылаю к работам, приведенным в списке литературы в конце статьи, причем особенно важными являются статьи Ш. Вернера [5] и А. Троста [3].

Не входя в детальное описание физической картины процесса возникновения, жизни и обрыва разряда в счетчике, напомню

лишь, что существеннейшую роль в нем играет возбуждение молекул, испускание ими световых квантов и выбивание последними фотоэлектронов из материала катода. Детально картина эта рассмотрена у Вернера и у Троста. При этом первый из них вывел формулу для начального напряжения:

$$V_{AS} = U \frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{\ln \left(\frac{\lambda n}{r_i} + 1\right)},$$

где r_a и r_i — соответственно радиусы цилиндра и нити, λ — длина свободного пробега электрона в газе, рассчитанная по молекулярно-кинетической теории, n и U — некоторые константы данного газа, физический смысл которых таков: в счетчике существует „активная зона“ цилиндрической формы, расположенная коаксиально нити и цилиндрическому катоду; радиус этой зоны $n\lambda + r_i$, и на протяжении этих $n\lambda$ должно происходить падение потенциала в U вольт. Только при этих условиях может начаться разряд.

Для объяснения причин температурного эффекта мне кажется существенным обратить внимание на возможность изменения работы выхода электрона из металла катода при изменении температуры. Ясно, что если, например, работа выхода повысится, то уже большие по величине кванты необходимы для выбивания фотоэлектронов, а значит, те фотоны, которые ранее образовывались во внешнем слое активной зоны, уже действовать не станут — радиус активной зоны уменьшится. Для восстановления его в прежних размерах необходимо поднять напряжение U. Значит, V_{AS} увеличится. Но тот факт, что на протяжении прежних n длин свободного пробега падение напряжения уже больше, чем раньше, приводит к увеличению ионизации газа, а значит — к увеличению объемного заряда. Это в свою очередь приводит к удлинению рабочего интервала, который, как известно, своим существованием обязан именно объемному заряду. Таким образом ясно, что наблюдавшиеся в моем опыте и в опытах других экспериментаторов закономерности могли бы быть объяснены, если бы почему-либо при изменении температуры увеличивалась, и притом более или менее значительно, работа выхода.

Известно, что фотоэффект металлов в сильнейшей степени зависит от рода и количества адсорбированных на поверхности газов. В точности такую же зависимость обнаруживает и термоионная эмиссия.[1] Следовательно, вообще работа выхода электрона из металла зависит от адсорбированных газов. Ряд опытов (Уэло [7], Германа [7], Сурмана [7]) доказали, что водо-

[1] Зависимость термоионной эмиссии чрезвычайно велика. При некотором значении покрытия начинается резкий экспоненциальный спад работы выхода, пока покрытие не достигает толщины мономолекулярного слоя. Затем опять начинается экспоненциальный рост работы выхода. Интересующихся подробностями отсылаем к работе тт. Жихарева и Калитеевского [6].

род (главным образом ионизированный) сильно влияет на работу выхода платины в сторону ее понижения. То же доказано Локру [7] относительно паров органических веществ (замазка, воск, масло). К сожалению, опыты производились не над теми металлами, из которых обычно делают счетчики. Так, например, о фотоэлектрических свойствах меди, а тем более латуни, очень мало сведений, об Al и Fe — несколько больше, и наибольшее число работ посвящено исследованию платины и щелочных металлов. Вообще можно сказать, что адсорбированные газы меняют граничную волну в широких пределах. При этом разные газы влияют различно. Например, для Ag — H_2 уменьшает, а O_2 — увеличивает работу выхода, у Fe — O_2 и H_2 уменьшают, у Pt — O_2, органические пары, H^+ уменьшают работу выхода. Подробные сведения об этом вопросе желающие могут найти в книге Юза и Дюбриджа [7] „Фотоэлектрические явления".

При изменении температуры меняется, естественно, количество адсорбированных газов. А это может привести к значительному изменению работы выхода. При нагревании часть газа выделяется, и, значит, работа выхода увеличивается; это же, как уже выше установлено, приводит к увеличению V_{AS}.

Интересно было бы экспериментально проверить это в общих чертах высказанное предположение о причине температурного эффекта. Для этого можно поставить следующий опыт: счетчик, из серебра, относительно которого известно, что H^+ уменьшает работу выхода, а N_2, метан (CH$_2$) и, повидимому, O_2 увеличивают работу выхода, надо заставить работать при наполнении, скажем, аргоном с добавкой того или иного из различно влияющих газов. Если эффект от добавки, например, H_2, а главное — от нагрева предварительно выдержанного в атмосфере H^+ счетчика, приведет к уменьшению V_{AS}, а то же самое при добавке CH_4 — к увеличению V_{AS}, то значит — главенствующую роль в температурном эффекте действительно играет изменение работы выхода.

Еще один факт говорит за то, что объяснение температурного эффекта следует искать именно в изменении работы выхода, во всяком случае — в изменении количества адсорбированных газов. Факт этот — уже описанное явление гистерезиса. Действительно, количество адсорбированных газов не сразу меняется при изменении температурных или иных внешних условий. Для установления равновесия необходимо значительное время.

Итак, пытаясь разобрать возможную физическую причину температурного эффекта, мы пришли к заключению, что весьма вероятно объяснение этого эффекта изменением условий на поверхности катода, — изменением работы выхода электрона из металла. Возможно, что в этом же следует искать причину резкого влияния на работу счетчика органических примесей к наполняющему газу.

Остается пожелать, чтобы работа над выяснением причин температурного эффекта счетчиков Гейгера—Мюллера была продолжена для получения экспериментального подтверждения или опровержения высказанной мысли.

*

В заключение приношу благодарность доценту Георгию Васильевичу Горшкову за проявленный интерес к моей работе и внимательное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christoph u. Hanle, Phys. ZS., 34, 641, 1933.

2. Вернов С. Н., Метод изучения космических лучей в стратосфере с помощью радиозондов, кандидат. дисс., 1936.

3. A. Trost, ZS. für techn. Phys., 16, 407, 1935; Phys. ZS. 36, 801, 1935; ZS. für Phys. 105, 399, 1937.

4. Volz, ZS. für Phys., 93, 35, 1935.

5. S. Werner, ZS. für Phys., 78, 92, 1932.

6. Жихарев и Калитеевский, „Ученые записки ЛГУ", № 29, 1939.

7. Юз А. Л. и Дюбридж Л. А., „Фотоэлектрические явления", ОНТИ НКТП, 1936.

ОГЛАВЛЕНИЕ

17 p.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
530.5 LE C001 v.6(1940)
Seriia fizicheskikh nauk.

3 0112 088418246